

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE NANCY I

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS-SCIENCES

par

Roland SCHIESTEL

Ingénieur ENS.E.M.

Maître ès-Sciences

SUJET :

**Sur un nouveau modèle de turbulence
appliqué aux transferts
de quantité de mouvement et de chaleur**

Soutenue publiquement le 29 Octobre 1974 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Président : M. J. LEGRAS

Examineurs : MM. M. LUCIUS

M. MARTIN

Mlle G. COMTE BELLOT

M. J. GOSSE

THÈSE

L'UNIVERSITÉ DE NANCY I

DOCTEUR EN MÉDECINE

SAINT-SURPASTEUR

CHIMIE ORGANIQUE

PAR M. J. J. J.

1982

Sur un nouveau motif de l'industrie
Synthèse des produits
de qualité de l'industrie et de l'agriculture

Présentée et soutenue publiquement le 12 Octobre 1982 devant le Jury composé de :

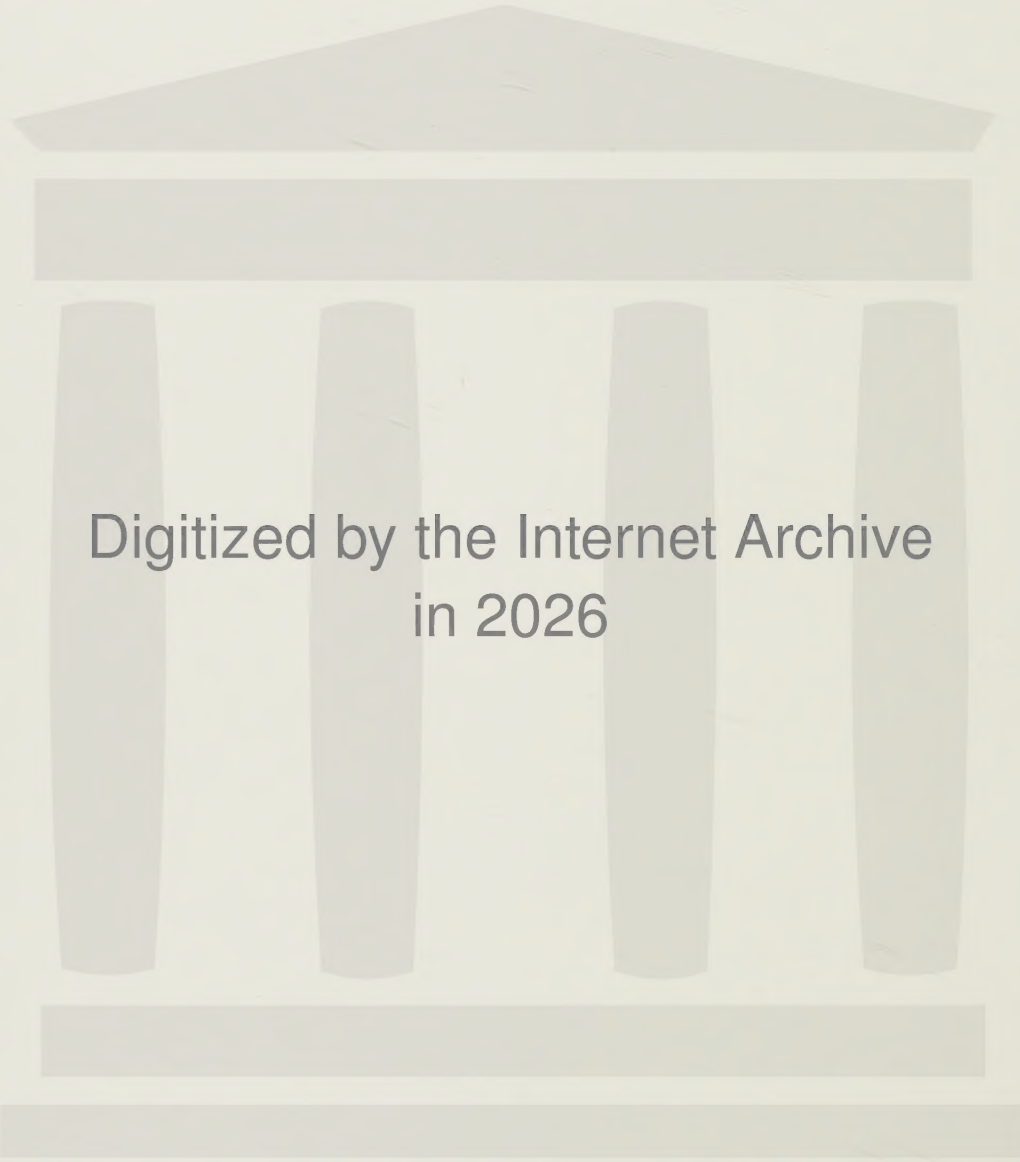
M. J. J. J.

M. J. J. J.

M. J. J. J.

LOUDART & CLÉMENT
RELIEURS

11, Rue Sainte-Anne, 11
Tél. 52.80.09 - NANCY



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547402_0001

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE NANCY I

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS-SCIENCES

par

Roland SCHIESTEL

Ingénieur E.N.S.E.M.

Maître ès-Sciences

SUJET :

**Sur un nouveau modèle de turbulence
appliqué aux transferts
de quantité de mouvement et de chaleur**

Soutenue publiquement le 29 Octobre 1974 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Président : M. J. LEGRAS

Examineurs : MM. M. LUCIUS
M. MARTIN

Mlle G. COMTE-BELLOT
M. J. GOSSE

THÈSE

Présentée à

UNIVERSITÉ DE NANCY I

Pour l'obtention du

DOCTORAT EN SCIENCES

par

Robert SCHNEIDER

Ingénieur en Chef

des Ponts et Chaussées

1961

Sur un nouveau modèle de turbulence
appliqué aux transferts
de quantité de mouvement et de chaleur



Soutenue publiquement le 23 Octobre 1961 devant la Commission d'Examen

Président du Jury :

M. J. LEBLANC

Examinateur :

M. J. LEBLANC

Examinateur :

M. MARTIN

M. G. COHEN

M. J. LEBLANC

Cette étude, qui m'a été proposée par Monsieur le Professeur J.GOSSE, ancien Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique de Nancy, a été effectuée sous sa direction au Laboratoire de Mécanique de l'Ecole et poursuivie au Laboratoire de Thermique du Conservatoire National des Arts et Métiers à Paris. Ma présence au C.N.R.S. m'a permis de me consacrer pleinement à la recherche et ainsi, de mener cette étude à bonne fin.

Monsieur le Professeur J. LEGRAS a pris connaissance de mon travail avec intérêt et bienveillance. Je le prie d'agréer mes respectueux remerciements et je lui exprime toute ma reconnaissance pour l'honneur qu'il me fait en présidant le Jury de cette thèse.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur J.GOSSE qui par ses conseils, ses encouragements, ses critiques constructives, m'a apporté une aide efficace et sûre dont j'ai bénéficié tout au long de mon travail de recherche. Je le remercie de m'avoir orienté dans une direction que j'ai constatée riche de tant d'intérêts scientifiques.

Mademoiselle le Professeur G. COMTE-BELLOT a bien voulu parrainer ma recherche auprès du C.N.R.S. et a suivi mon travail avec bienveillance et sollicitude, je suis très honoré de sa présence au sein du Jury de thèse.

Je remercie très sincèrement Monsieur le Professeur M. LUCIUS, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique de Nancy, et Monsieur le Professeur M. MARTIN d'avoir bien voulu accepter de participer au Jury.

Je remercie Monsieur M.G. ROBIN, Chef du Service d'Etude et Développement des Générateurs de Vapeur au Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay pour l'excellent accueil qu'il m'a réservé dans son Service et l'intérêt qu'il a bien voulu porter à mon travail dans ses applications aux transferts thermiques. C'est grâce aux facilités qu'il m'a accordées pour l'utilisation des ordinateurs de grande capacité que les études numériques ont pu être menées à bien.

Ma reconnaissance va aussi au personnel technique et administratif pour leur aimable contribution à la réalisation de ce mémoire.

TABLE DES MATIERES

	<u>Pages</u>
INTRODUCTION	-
Chapitre I - LES DESCRIPTIONS THEORIQUES DE LA TURBULENCE	1
I-1 Principales contributions à la théorie de la turbulence.	1
I-1.1 Les premières approches du phénomène.	1
I-1.2 Les théories statistiques et les théories phénomé- nologiques.	2
I-2 Le problème de la turbulence.	3
I-2.1 La description du mouvement turbulent.	3
I-2.2 Divers types d'approches et nouvelles conceptions.	5
I-2.3 Le rôle des modèles de turbulence.	7
I-3 Les modèles mathématiques de turbulence.	8
I-3.1 Longueur de mélange et viscosité de turbulence.	9
I-3.2 Modèles de turbulence à une équation de transport.	20
I-3.3 Modèles à plusieurs équations de transport.	27
Chapitre II - INTRODUCTION D'UN NOUVEAU MODELE DESCRIPTIF DU MOUVEMENT ET DU TRANSFERT TURBULENTS	36
II-1 Equations de transport de la turbulence.	37
II-1.1 Equations fondamentales du mouvement.	37
II-1.2 Equations de transport des corrélations doubles.	37
II-1.3 Evolution de la microéchelle de turbulence.	43
II-1.4 Evolution de l'échelle intégrale de turbulence.	44
II-2 Transfert de chaleur ou de masse par turbulence.	48
II-3 Application à des configurations types.	50
II-3.1 Décroissance de la turbulence derrière une grille.	50
II-3.2 Loi logarithmique de paroi.	53
II-3.3 Sous-couche visqueuse.	57
II-3.4 Ecoulement turbulent unidirectionnel à gradient transversal de vitesse.	61
II-3.5 Distorsion uniforme de turbulence homogène.	63

II-3.6 Le choix des constantes fondamentales.	65
II-4 Versions simplifiées.	66
II-4.1 Modèle de viscosité turbulente.	66
II-4.2 Modèle de transport de la contrainte de cisail- lement turbulent.	68
Chapitre III - ECOULEMENTS TURBULENTS EN CONDUITE.	69
III-1 L'approche numérique.	69
III-1.1 Formulation adimensionnelle.	69
a) Problème dynamique dans la version simplifiée.	70
b) Description du champ turbulent d'après le modèle complet.	71
c) Problème thermique.	74
III-1.2 Méthode numérique de résolution.	75
III-2 Application des modèles simplifiés.	80
III-2.1 Résultats relatifs au problème dynamique.	80
III-2.2 Résultats relatifs au problème thermique.	82
a) Transfert de chaleur par métal liquide.	82
b) Nombres de PRANDTL supérieurs.	87
III-3 Application du modèle complet.	87
III-3.1 Ecoulement entre plaques planes parallèles.	88
III-3.2 Ecoulement dans un tube circulaire.	90
III-4 Ecoulement dans les espaces annulaires.	92
III-4.1 Description de l'écoulement.	93
III-4.2 Résultats numériques.	94
a) Application du modèle complet.	94
b) Application du modèle simplifié.	97
Chapitre IV - ECOULEMENTS LIBRES TURBULENTS.	99
IV -1 L'approche numérique.	99
IV-1.1 Transformation des équations générales.	99
IV-1.2 Méthode numérique de résolution.	104
a) Discrétisation des équations.	104
b) Procédé de résolution.	107
IV-2 Etude aérothermique des jets libres turbulents.	110
IV-2.1 Jet plan turbulent dans une atmosphère immobile.	111
a) Application du modèle simplifié.	111
b) Application du modèle complet.	112

IV-2.2 Jet plan turbulent dans une atmosphère en mouvement.	113
IV-2.3 Zone de mélange.	115
IV-3 Sillages turbulents derrière un obstacle.	116
IV-3.1 Dynamique et transfert thermique dans le sillage lointain.	116
a) Application du modèle simplifié.	116
b) Application du modèle complet.	117
IV-3.2 Effet de la préturbulence du courant extérieur.	118
CONCLUSION	119
BIBLIOGRAPHIE	122

NOTATIONS

Nous ne donnons ici que les notations principales ; les autres plus particulières seront définies dans le texte.

$A_g, A_q, A_s, A_o, A_{sq}, A_L, \omega, a, b, \Delta, \beta, C, \zeta, \eta$	
$A_1, \alpha, \chi, \gamma$	constantes numériques des modèles.
C_p	chaleur spécifique à pression constante.
C_T	coefficient de trainée.
D_t	coefficient de diffusivité thermique turbulente.
$E(k,t)$	spectre moyen d'énergie turbulente.
E	taux de dissipation d'énergie turbulente.
f, g	grandeurs turbulentes quelconques instantanées (scalaires ou tensorielles).
f', g'	partie fluctuante de f et g .
$\bar{f}, \bar{g}$	partie moyenne de f et g .
h	demi-distance entre plaques planes ou rayon du tube.
H	enthalpie.
j_i	vecteur densité de flux de chaleur.
j_o	densité de flux de chaleur pariétal.
k	nombre d'onde.
$K_i/P, K_P/j$	tenseurs de corrélation pression-vitesse en deux points distincts A et B ($\overline{v'_{iA} P'_B}, \overline{P'_A v'_{jB}}$)
L	échelle intégrale de turbulence.
m_E, m_I	vitesse de transfert aux frontières I et E.
Nu	nombre de NUSSELT défini sur le diamètre hydraulique.
$Marg$	Nombre de MARGOULIS ($Nu/Re.Pr$)
p	pression.
Pr	nombre de PRANDTL moléculaire ($C_p \mu / \lambda$).
Pr_t	nombre de PRANDTL turbulent (ν_t / D_t).
Pe	nombre de PECLET ($Re.Pr$).
q'	énergie cinétique des fluctuations de vitesse ($\overline{v'_i v'_i} / 2$).
q	énergie cinétique moyenne des fluctuations de vitesse ($\overline{\overline{v'_i v'_i} / 2}$).
Q_{ij}	tenseur de corrélation du second ordre en deux points distincts A et B ($\overline{\overline{v'_{iA} v'_{jB}}}$).
R_{ij}	tenseur de REYNOLDS ($\overline{\overline{v'_i v'_j}}$)

$R_{ll}(r,t)$	corrélation spatiale double longitudinale.
$R_{nn}(r,t)$	corrélation spatiale double transversale.
Re	nombre de REYNOLDS basé sur la vitesse maximale u_o et le diamètre hydraulique.
Re, Re_i	nombre de REYNOLDS basé sur la vitesse moyenne de débit V et le diamètre hydraulique.
δ	microéchelle de turbulence.
$S_{i/jk}, S_{ik/j}$	tenseurs de corrélation du troisième ordre en deux points distincts A et B ($\overline{v'_{iA} v'_{jB} v'_{kB}}$, $\overline{v'_{iA} v'_{kA} v'_{jB}}$).
T	température absolue.
T_f	température moyenne du fluide.
T_p	température de paroi.
ΔT_o	écart initial de température entre fluide et paroi.
T_*	température de frottement ($j_o/\rho C_p v_*$).
T_o	température du fluide à l'embouchure d'un jet.
T_{ijk}	corrélations triples de vitesse ($\overline{v'_i v'_j v'_k}$).
u_o	vitesse maximale dans une conduite ou vitesse uniforme à l'embouchure d'un jet.
u_1	vitesse du courant extérieur en écoulement libre.
u_m	vitesse moyenne axiale dans un écoulement libre.
u_d	vitesse déficitaire dans un sillage ($u_1 - u$).
u_{dm}	vitesse déficitaire axiale.
v_i, v'_i	composantes générales de vitesse instantanée fluctuation de cette composante.
v_*	vitesse de frottement.
V	vitesse moyenne du fluide dans une conduite.
x_i	coordonnées d'espace.
α_j, α_T	coefficient de transfert de chaleur ($j_o/T_p - T_f$) à flux constant et à température constante.
δ	épaisseur de l'écoulement.
δ_o	épaisseur initiale de l'écoulement.
δ_*	épaisseur de déplacement.
δ_{ij}	tenseur unité.
ϵ_t	coefficient de diffusivité turbulente dans le modèle ($AL \sqrt{q}$).
θ_*	épaisseur de quantité de mouvement.
κ	constante de VON KARMAN.
λ	coefficient de conductivité thermique.

λ^*	coefficient de perte de charge.
λ_L	microéchelle de G.I. TAYLOR (transversale).
μ	coefficient de viscosité moléculaire dynamique.
ν	coefficient de viscosité moléculaire cinématique.
ν_t	coefficient de viscosité turbulente.
π	rapport pression/masse volumique (P/ρ).
ρ	masse volumique.
σ	coefficient de diffusivité turbulente.
σ_e	coefficient total de diffusivité apparente ($\sigma + \nu$).
τ	contrainte de cisaillement locale.
τ_o	contrainte de cisaillement à la paroi.
ϕ	fonction générique vérifiant une équation de transport et pouvant être identifiée à un des paramètres du modèle.
ψ	fonction de courant.
Ω	fonction de courant réduite $(\psi - \psi_I) / (\psi_E - \psi_I)$.

Indices utilisés dans la méthode numérique de
S.V. PATANKAR et D.B. SPALDING.

E	Frontière extérieure de l'écoulement libre.
I	Frontière intérieure de l'écoulement libre.
U	Ligne amont de discrétisation.
D	Ligne aval de discrétisation.

INTRODUCTION

Si les équations du mouvement des fluides newtoniens en régime laminaire sont depuis longtemps établies, il n'en est pas de même pour celles du régime turbulent. Malgré la variété des études expérimentales sur la structure des écoulements turbulents, les mécanismes fondamentaux du phénomène n'ont pu être clairement élucidés et à l'heure actuelle bien des problèmes restent ouverts, parfois énigmatiques. Cependant, la plupart des écoulements rencontrés dans le domaine industriel sont de nature turbulente et beaucoup de phénomènes tels que le transfert de chaleur et de masse sont si intimement liés au mouvement du fluide que leur étude nécessite la résolution préalable du problème dynamique.

Afin de résoudre ces problèmes pratiques, de nombreux modèles de turbulence ont été construits au fil des années, qui permettent dans chaque cas le calcul des distributions de vitesse, de température ou de concentration au sein du fluide turbulent. Les premières théories empiriques de formulation très simple sont basées sur l'emploi d'un coefficient de viscosité turbulente et sur le schéma de longueur de mélange. Ces types de modèles et leurs diverses améliorations ont largement été utilisées et ont permis, malgré leurs limitations théoriques de reproduire assez bien les mesures d'origine expérimentale. Cependant, ces théories empiriques ont chacune leur propre formulation valable dans un domaine très restreint et par suite des schémas distincts sont utilisés pour le calcul des écoulements turbulents confinés dans les conduites, les jets libres et les sillages, la couche limite autour d'un obstacle. La mise en oeuvre d'hypothèses de plus en plus élaborées sur le comportement du fluide turbulent a conduit, ces dernières années, à la construction de schémas plus complexes qui permettent outre le calcul



de l'écoulement moyen, la prévision des caractéristiques du champ turbulent. Ces travaux s'orientent vers la recherche de modèles dont le caractère universel permettrait la résolution des écoulements turbulents dans des géométries très différentes et souvent complexes rencontrées dans le domaine des applications.

Le présent travail s'inscrit dans cette ligne de pensée. Un nouveau modèle différentiel composé d'un ensemble d'équations tensorielles d'évolution des corrélations de vitesse et des échelles de turbulence qui schématisent le comportement du fluide turbulent est proposé dans le but d'évaluer le transfert de quantité de mouvement, de chaleur et de masse dans l'écoulement turbulent. De nombreuses confrontations expérimentales ont été faites afin de justifier par leurs conséquences les hypothèses introduites.

CHAPITRE I

LES DESCRIPTIONS THEORIQUES DE LA TURBULENCE

Depuis les premiers essais maintenant classiques de L.PRANDTL et G.I. TAYLOR, de nombreux modèles de turbulence ont été construits, dont nous avons essayé de dégager les caractères essentiels. L'ouvrage de synthèse de B.E. LAUNDER et D.B. SPALDING /6/ permet une étude comparative des principaux types de modèles mathématiques.

Afin de situer le problème actuel de la turbulence, nous allons auparavant rappeler les principales étapes qui ont conduit aux théories classiques de la turbulence puis aux diverses approches plus récentes, quelques aspects d'une science encore multiforme dont la construction s'effectue progressivement avec l'apport de matériaux nouveaux.

I-1 PRINCIPALES CONTRIBUTIONS A LA THEORIE DE LA TURBULENCE

I-1.1 Les premières approches du phénomène

L'existence de deux régimes très différents d'écoulement d'un fluide, que l'on désigne maintenant par laminaire et turbulent, avait

été remarquée dès la première moitié du XIX^e siècle. Cependant, la théorie de la turbulence n'a pris son essor qu'à la fin du siècle dernier grâce aux travaux de J. BOUSSINESQ (1877) qui introduisit la notion de coefficient d'échange ou de viscosité de turbulence et de O. REYNOLDS (1893) qui, s'intéressant aux conditions d'apparition de la turbulence dans les conduites, formula un critère général de similitude dynamique des écoulements visqueux à l'aide du "nombre de Reynolds". Une autre contribution importante de O. REYNOLDS est la représentation de toutes les grandeurs hydrodynamiques comme la somme d'une partie moyenne et d'une partie fluctuante due à l'agitation turbulente, conduisant ainsi à l'emploi des méthodes statistiques qui permettent l'étude des valeurs moyennes. G.I. TAYLOR (1921) a montré toute l'importance des fonctions de corrélation dans l'étude du transport par turbulence dans le cadre de la description Lagrangienne du mouvement. L.V. KELLER et A.A. FRIEDMANN (1924) /15/ ont proposé une méthode générale d'obtention des équations d'évolution des moments des variables dynamiques à tout ordre. L'ensemble de ces équations forme un système infini et tout sous-système fini contient plus d'inconnues que d'équations, son utilisation dans l'étude du mouvement fait apparaître le problème fondamental de fermeture des équations.

C'est à partir des années 1910 et surtout 1920, que s'appuyant sur de nombreux résultats expérimentaux alors disponibles, plusieurs chercheurs dont L. PRANDTL (1925), G.I. TAYLOR (1915, 1932), TH. VON KARMAN (1930), ont ensuite essayé de compléter le schéma élémentaire de O. REYNOLDS par la formulation de théories semi-empiriques de la turbulence. L. PRANDTL, en particulier, a introduit le concept de longueur de mélange, notion déjà utilisée par G.I. TAYLOR pour le problème du transfert de chaleur.

I-1.2 Les théories statistiques et les théories phénoménologiques

C'est à la fin de la période précédente que la théorie statistique de la turbulence homogène et isotrope basée sur la description du champ turbulent par les corrélations spatiales de vitesse a été formulée par TH. VON KARMAN et L. HOWARTH (1938) qui en ont donné

une présentation achevée. Parallèlement la théorie spectrale de la turbulence est introduite par G.I. TAYLOR (1937). Ces travaux ont grandement contribué à la compréhension physique de la nature de la turbulence. A.N. KOILMOGOROFF et A.M. OBUKHOV (1941) développent ensuite la théorie de l'isotropie locale et de l'équilibre statistique des petits tourbillons aux nombres de REYNOLDS élevés. Ces travaux sur la structure fine de la turbulence mettent en lumière des mécanismes fondamentaux de portée générale ; un support théorique est apporté à l'image du processus de cascade et d'effiloquement des tourbillons suivant lequel l'énergie turbulente est transmise à des évolutions d'échelle de plus en plus petite. A cette même époque, W. HEISENBERG (1948) apporte une importante contribution à la théorie spectrale de la turbulence. Des résultats remarquables sur les plans théoriques et expérimentaux ont été ensuite obtenus par G.K. BATCHELOR et A.A. TOWNSEND (1948) à Cambridge. Une étude théorique de la turbulence en présence de vitesses moyennes a été effectuée ultérieurement par A. CRAYA (1958) qui permet de tenir compte de la production d'énergie turbulente prélevée sur le mouvement moyen.

Des théories phénoménologiques plus évoluées que le schéma de longueur de mélange sont formulées par P.Y. CHOU (1945) et J.C. ROTTA (1951) qui utilisent des équations d'évolution des corrélations de vitesse et des échelles de turbulence. Les nombreux modèles proposés par la suite ont évolué vers des formes plus complexes afin de tenter de couvrir un champ d'application de plus en plus vaste et une description plus détaillée du champ de turbulence (Cf § I-3).

I-2 LE PROBLEME DE LA TURBULENCE

I-2.1 La description du mouvement turbulent

Les équations de base de la turbulence dans le cadre de la mécanique des fluides sont presque toujours les équations de NAVIER-STOKES supposées valables de façon instantanée. Dans le cas d'un écoulement de fluide incompressible les équations s'écrivent :

$$v_i, \quad i = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j v_{i,j} = - p_{,i} + \mu v_{i,jj} \quad (2)$$

L'étude de tout écoulement turbulent pourrait donc se faire, du moins en principe, par résolution directe des équations de NAVIER. La recherche et la construction de solutions turbulentes des équations de NAVIER est un problème mathématique difficile, leur existence même n'a pas été démontrée. C'est dans cette voie que se situent les travaux théoriques de J. BASS sur les fonctions pseudo-aléatoires /16/. L'obtention de solutions turbulentes de l'équation (2) par une résolution numérique directe ne peut cependant se concevoir à l'heure actuelle même dans des configurations simples.

De ce point de vue, une solution turbulente est toujours une solution compliquée non stationnaire des équations du mouvement, présentant des fluctuations irrégulières dans l'espace et dans le temps. Devant cette apparence désordonnée des évolutions turbulentes et cette extrême complexité du phénomène on renonce, tout au moins provisoirement, à une étude détaillée du mouvement de chaque particule fluide. Une telle description détaillée, même si elle était possible, serait d'ailleurs inutile dans l'étude de tout problème pratique, vu cette complexité même du mouvement fluctuant.

L'attitude naturelle est d'introduire des méthodes statistiques par des raisonnements probabilistes dans le cadre d'une mécanique statistique des fluides s'appuyant sur la théorie des champs aléatoires /8/ /9/.

Le hasard apparent des évolutions turbulentes ayant son origine dans les irrégularités des conditions initiales et des conditions aux limites qui engendrent des instabilités propagées par le fluide est dû par conséquent à une surabondance de causes lointaines et difficilement accessibles. On peut donc se représenter tout écoulement turbulent comme la réalisation d'un champ vectoriel aléatoire.

La description complète d'un champ aléatoire à l'aide de densités de probabilités est très difficile, aussi on préfère ne considérer que les premiers moments statistiques simples. On est ainsi conduit à prendre des moyennes directement sur les équations aux dérivées partielles du mouvement qui fourniront les équations d'évolution des diverses grandeurs statistiques. L'opération de moyenne fait cependant apparaître dans les équations de nouvelles corrélations pour lesquelles nous n'avons aucun moyen direct pour en atteindre la valeur, c'est ainsi que s'introduit le problème de fermeture des équations. Prendre la moyenne d'une équation instantanée correspond en effet à une perte considérable d'information qu'il faudra compenser par l'introduction d'hypothèses nouvelles.

I-2.2 Divers types d'approches et nouvelles conceptions

De nombreuses approches de la turbulence ont été proposées suivant des voies assez diverses. La plupart des théories supposent que le mouvement détaillé instantané du fluide est décrit par les équations de NAVIER-STOKES. Quelques méthodes récentes sont basées sur un traitement numérique direct des équations de NAVIER. Une première approche dans cette direction est proposée par J.W. DEARDORFF (1970) /17/ qui effectue une résolution numérique directe /18/ des équations tridimensionnelles du mouvement pour les seules composantes de grande échelle, la microturbulence étant simulée par un coefficient de viscosité proportionnel à la vitesse de déformation locale. Des résultats intéressants sont ainsi obtenus sur l'évolution et la structure des gros tourbillons dans l'écoulement de POISEUILLE. D.K. LILLY (1971) /19/ obtient des solutions numériques des équations de NAVIER qui simulent le comportement d'une "turbulence" bidimensionnelle isotrope.

Une théorie proposée par W.V.R. MALKUS (1956) /20/ /21/ est basée sur l'utilisation d'un principe hypothétique de dissipation visqueuse maximale. La condition de stabilité de l'écoulement moyen conduit à une équation du type ORR-SOMMERFELD vérifiée par les perturbations des valeurs moyennes et il est supposé que la plus petite échelle des évolutions turbulentes possibles est l'échelle de stabi-

lité neutre, le transport de quantité de mouvement se trouvant alors décrit par une série finie. Une solution variationnelle est donnée au problème de stabilité qui conduit à un profil de vitesse en bon accord avec les résultats expérimentaux sur l'écoulement turbulent entre plaques planes.

J. R. TYLDESLEY et R. SILVER (1968) /22/ représentent le comportement du fluide turbulent par l'évolution de particules fluides, entités discrètes de dimension, de forme et de vitesse variables. L'analyse permet d'en déduire une expression pour les diffusivités de quantité de mouvement, de masse et d'énergie en fonction des propriétés de la turbulence dans une conduite. L'extension aux écoulements libres a été effectuée par J.R. TYLDESLEY (1969) /23/.

Une approche ondulatoire de la turbulence est proposée par M.T. LANDAHL (1967) /24/ puis O.M. PHILLIPS (1967) /25/ qui explique la production et l'entretien de la contrainte turbulente dans un écoulement cisailé par un mécanisme d'interaction entre composantes périodiques de la turbulence et le mouvement moyen. O.M. PHILLIPS est conduit à une expression pour le gradient de la contrainte de cisaillement τ

$$\tau_{,2} = A \theta R_{22} \bar{v}_{1,22}$$

où A est une constante dépendant du type de l'écoulement et θ une échelle intégrale temporelle.

Un essai de formulation d'une théorie semi-empirique permettant le calcul des contraintes de REYNOLDS dans l'hypothèse d'une relation non-linéaire entre contraintes et vitesses de déformation a été tenté par J. LUMLEY (1967) /26/. J. CROW (1968) /27/ étudie la turbulence comme un milieu viscoélastique à l'aide d'une relation proposée par A.A. TOWNSEND /28/

$$\bar{v}_{1,2} = \frac{\tau^{1/2}}{\kappa x_2} \left(1 - 0,2 \frac{x_2}{\tau} \mid \tau, 2 \mid \right)$$

Sur le plan théorique les travaux de E. HOPF /29/ /30/ ont permis la formulation du problème de la turbulence à l'aide d'une équation unique d'évolution de la fonctionnelle caractéristique du champ des vitesses.

Dans le cadre des théories analytiques de la turbulence R. KRAICHNAN (1959) /31/ /32/ introduit une hypothèse de fermeture basée sur l'interaction directe entre coefficients de FOURIER de la décomposition spatiale du champ des vitesses.

T.S. LUNDGREN (1967) /33/ /34/ /35/ obtient à partir des équations de NAVIER un système infini d'équations d'évolution des fonctions de distribution du champ des vitesses en plusieurs points qui est formellement analogue à la hiérarchie des équations de B.B.G.K.Y. de la mécanique statistique classique. Une hypothèse de fermeture est introduite au niveau de la fonction de distribution simple, en particulier, il est supposé que le terme de fluctuation de pression tend à rapprocher la fonction de distribution d'une loi de GAUSS. Plus récemment, T.S. YEN (1972) /36/ obtient une hiérarchie d'équations d'évolution des corrélations turbulentes directement à partir de l'équation cinétique de BOLTZMANN. P.M. CHUNG (1970) /37/ dans le but d'étudier la réaction chimique en milieu turbulent base son analyse statistique de la turbulence sur l'équation de LANGEVIN du mouvement Brownien au lieu des équations de NAVIER.

E.A. SPIEGEL (1972) /38/ étudiant le phénomène d'intermittence décrit la turbulence à l'aide d'un modèle à deux fluides analogue aux équations de LANDAU pour les superfluides.

I-2.3 Le rôle des modèles de turbulence

La variété des interprétations du phénomène de la turbulence et des tentatives de formulation théorique font apparaître la difficulté de son étude sur le plan fondamental. Cependant, la turbulence est un problème extrêmement important pour beaucoup d'applications pratiques et l'obtention de solutions, même approchées, permettant le calcul d'écoulements turbulents est nécessaire. Ainsi, en l'absence de théorie

unifiée , rationnelle et explicative, les ingénieurs confrontés à des problèmes concrets doivent souvent se frayer un chemin difficile. C'est alors le rôle des modèles de turbulence, par une schématisation du phénomène, orientée vers la prévision numérique des écoulements, de fournir un outil efficace à la résolution des problèmes pratiques. Le but des théories semi-empiriques est donc davantage descriptif et prévisionnel qu'explicatif du phénomène de turbulence. Les hypothèses introduites dans la formulation des modèles de turbulence sur l'expression des corrélations statistiques permettent de représenter le comportement du fluide de manière approximative en tenant compte globalement des mécanismes physiques dont le détail demeure encore mal élucidé.

I-3 LES MODELES MATHEMATIQUES DE TURBULENCE

On suppose que le fluide est newtonien et que le mouvement instantané vérifie les équations (1) et (2) dans l'hypothèse d'un écoulement isovolume. En régime turbulent, les grandeurs locales v_i et p peuvent être considérées comme des fonctions aléatoires pour lesquelles on distingue une partie moyenne et une partie fluctuante suivant le schéma de O. REYNOLDS.

$$v_i = \bar{v}_i + v'_i \quad p = \bar{p} + p' \quad (3)$$

Compte tenu de (3), les équations du mouvement prises en valeur moyenne conduisent aux classiques équations de O. REYNOLDS.

$$\bar{v}_{i,i} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \bar{v}_{i,j} = - \bar{\pi}_{,i} + \nu \bar{v}_{i,jj} - R_{ij,j} \quad (5)$$

dans lesquelles $R_{ij} = \overline{v'_i v'_j}$

L'apparition du tenseur de REYNOLDS dans les équations du mouvement moyen introduit une indétermination qui ne peut être levée qu'en apportant des hypothèses supplémentaires permettant de relier les corrélations au champ des grandeurs moyennes. C'est là, la difficulté de base dans l'analyse des écoulements turbulents. Comment relier les caractéristiques fluctuantes aléatoires à l'écoulement moyen ?

Les nombreuses théories phénoménologiques proposées depuis les premiers travaux de L. PRANDTL jusqu'aux modèles récents les plus évolués tentent de donner une solution à ce problème.

I-3.1 Longueur de mélange et viscosité de turbulence

Les premières théories les plus simples introduisent une relation algébrique entre les corrélations et les vitesses moyennes basées sur le concept de longueur de mélange ou de viscosité turbulente.

Par analogie avec le transfert de quantité de mouvement par viscosité moléculaire, J. BOUSSINESQ (1877) introduisit l'hypothèse

$$\overline{v'_1 v'_2} = - \sigma \overline{v}_{1,2} \quad (6)$$

applicable dans les écoulements bidimensionnels cisailés.

La viscosité turbulente apparente ne traduit pas une propriété réelle du fluide, mais représente un moyen de calcul qui permet de tenir compte des effets de transfert de quantité de mouvement par turbulence.

L.PRANDTL (1925) essaya de relier σ aux caractéristiques de la turbulence et introduisit la longueur de mélange, notion inspirée de la théorie cinétique des gaz. Nous nous restreindrons comme L.PRANDTL le fit lui-même, au cas d'écoulements bidimensionnels avec gradient transversal de vitesse moyenne dans le sens Ox_2 , tels que la relation (6) s'applique. L. PRANDTL s'appuie sur l'idée que les particules

fluides gardent leur identité pendant leur mouvement transversal et que la fluctuation turbulente résulte principalement de la différence dans les propriétés moyennes entre les plans $x_2 = c^{te}$ espacés d'une distance ℓ . Dès lors,

$$v_1' = \ell \bar{v}_{1,2}$$

et en tenant compte de (6) il vient,

$$\sigma = - \overline{v_2' \ell}$$

On suppose habituellement la proportionnalité de v_2' à $-v_1'$, ce qui permet d'écrire

$$v_2' = - \ell |v_{1,2}'|$$

$$\overline{v_1' v_2'} = - \ell^2 |\bar{v}_{1,2}| \bar{v}_{1,2} \quad (7)$$

c'est à dire

$$\sigma = \ell^2 |\bar{v}_{1,2}| \quad (8)$$

Dans l'expression (8) il est nécessaire de déterminer la longueur ℓ dans chaque cas, son calcul dépendra de la géométrie de l'écoulement étudié. De très nombreuses variantes de ces méthodes ont été proposées, mais leurs principales caractéristiques communes résident dans le fait qu'elles supposent toutes : une hypothèse de transport turbulent exprimée sous forme simple d'un gradient lié aux grandeurs moyennes jointe à une expression locale de la viscosité turbulente.

L'utilisation de ces modèles de viscosité turbulente et de longueur de mélange ainsi que ceux qui leur sont dérivés nécessite une formulation différente pour chaque type particulier d'écoulement. Ces diverses formulations peuvent être rattachées à une classification conventionnelle des études sur la turbulence : écoulements libres, écoulements semi-libres tels que couches-limites et écoulements confinés en conduites.

a) Les théories classiques de la turbulence libre peuvent conduire à des résultats analytiques très simples dans le cadre d'une hypothèse de similitude des profils /1/. Dans un jet libre turbulent la longueur de mélange de L. PRANDTL est supposée proportionnelle à l'épaisseur δ du jet (δ peut être définie par exemple comme la distance à l'axe du point dont la vitesse est moitié de la vitesse sur l'axe).

$$l/\delta = c \frac{te}{\delta} \quad (9)$$

W. TOLLMIEEN appliqua cette hypothèse au cas de la zone de mélange d'un jet plan ainsi qu'à des jets turbulents plans et circulaires issus d'un très petit orifice afin d'obtenir une solution analytique du profil des vitesses. La théorie de H. SCHLICHTING sur les sillages turbulents est également basée sur cette hypothèse.

La théorie de G.I. TAYLOR (1932) de la turbulence libre suppose que la contrainte turbulente est due au transfert du vecteur tourbillon. Dans un écoulement bidimensionnel le rotationnel moyen est donné par

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} (\bar{v}_{1,2} - \bar{v}_{2,1}) \approx \frac{1}{2} \bar{v}_{1,2} \quad (10)$$

La perte d'individualité de la particule après le parcours l_T s'accompagne de la fluctuation $\omega' = l_T \bar{\omega}_{,2}$ et par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{v'_{1,2}}{v'_2 v'_{1,2}} &= \frac{l_T \bar{v}_{1,22}}{v'_2 l_T \bar{v}_{1,22}} \\ v'_2 v'_{1,2} &= v'_2 l_T \bar{v}_{1,22} \end{aligned} \quad (11)$$

v'_2 étant proportionnel à $l_T \bar{v}_{1,2}$ cette hypothèse conduit à la même équation que celle obtenue dans le cadre de la théorie de L. PRANDTL si $l_T = l \sqrt{2}$.

Une nouvelle théorie due à L. PRANDTL (1942) est basée sur la formule (6) de J. BOUSSINESQ. Il est supposé que σ est constant dans une section du jet et compte tenu d'une hypothèse supplémentaire de

similitude des profils, la viscosité turbulente peut être exprimée par la relation

$$\sigma = \chi \delta (v_m - v_e) \quad (12)$$

χ étant une constante empirique, tandis que $(v_m - v_e)$ représente l'écart entre la vitesse sur l'axe et la vitesse du fluide ambiant. Les applications de cette nouvelle théorie à la zone de mélange d'un jet et au jet plan turbulent issu d'un orifice mince sont dues à H. GORTLER (1942).

H. REICHARDT (1941) suppose que le transport de quantité de mouvement est proportionnel au gradient de la composante horizontale de la quantité de mouvement

$$\overline{v_1' v_2'} = - \Lambda (x_1) (\overline{v_1'^2})_{,2} \quad (13)$$

où Λ est un paramètre constant dans chaque section. Cette hypothèse conduit à une équation formellement identique à l'équation de la chaleur dont la résolution fournit des profils en bon accord avec l'expérience. Cependant, comme le fait remarquer J.O. HINZE /5 p.291/ l'hypothèse de H. REICHARDT ne satisfait pas au principe d'invariance Galiléenne et ne peut donc être correcte dans toutes ses conséquences. Une nouvelle approche basée sur la représentation de l'écoulement turbulent par un ensemble statistique de tourbillons est proposée par A.G. PRUDNIKOV, V.N. SAGALOVICH et E.P. YUKINA (1972) /39/ pour le calcul des écoulements libres.

b) L'étude d'écoulements semi-libres et en particulier la couche-limite a été l'objet de très nombreuses approches vu toute l'importance pratique de ce type d'écoulement. Les écoulements autour d'une paroi lisse possèdent une structure turbulente qui fait apparaître à la fois les caractéristiques de la turbulence libre et celles de la turbulence de paroi. On peut distinguer de façon conventionnelle trois régions dans l'écoulement : une sous-couche visqueuse adjacente à la paroi d'épaisseur δ_ℓ , une région

intermédiaire de fluide turbulent encore très influencée par la viscosité moléculaire et enfin tout le reste de l'écoulement dans lequel l'action de la viscosité moléculaire est négligeable et où les caractères de la turbulence libre apparaissent.

En présence d'une paroi la longueur de mélange de L. PRANDTL considérée comme proportionnelle à la distance à la paroi $l = \chi x_2$ (14) conduit au profil de vitesse logarithmique. Une hypothèse différente introduite par TH. VON KARMAN $l = \kappa \bar{v}_{1,2} / \bar{v}_{1,22}$ (15) conduit également à un profil logarithmique.

F.H. CLAUSER (1954) a proposé une hypothèse qui suppose la viscosité turbulente constante dans toute section de la couche-limite proportionnelle à la vitesse v_m du fluide au loin et à l'épaisseur de déplacement δ_*

$$\sigma = c \frac{te}{v_m} \delta_* \quad (16)$$

Une hypothèse de ce type est également appliquée par M. INOUE, J.G. MARVIN et Y.S. SHEAFFER (1972) /40/ pour le calcul de sillages turbulents.

La formule de M.P. ESCUDIER (1966) pour la longueur de mélange, obtenue à partir de nombreux résultats d'expériences est recommandée par B.E. LAUNDER et D.B. SPALDING /6/. l est calculé par

$$\begin{aligned} l &= \kappa x_2 & \text{pour} & & x_2 \leq 0,09 \cdot \delta / \kappa \\ l &= 0,09 \delta & \text{pour} & & x_2 > 0,09 \cdot \delta / \kappa \end{aligned} \quad (17)$$

δ étant l'épaisseur de la couche-limite.

Cette expression de longueur de mélange est utilisée par M.P. ESCUDIER et W.B. NICOLL (1968) /41/ dans une méthode intégrale de calcul de la couche-limite.

Ces dernières relations s'appliquent dans la zone pleinement

turbulente de l'écoulement. Des améliorations ont été proposées afin de décrire également la région proche de la paroi.

Les principales sont celles de J.C. ROTTA (1950)

$$l = c^{te} (x_2 - \delta_l) \quad (18)$$

soit $\sigma = c^{te} (x_2 - \delta_l)^2 |\bar{v}_{1,2}|$

de H. REICHARDT (1951)

$$\sigma = c^{te} v_* (x_2 - \delta_l \th \frac{x_2}{\delta_l}) \quad (19)$$

de R.G. DEISSLER (1954)

$$\sigma = c^{te} \bar{v}_1 x_2 \{1 - \exp(-A \frac{\bar{v}_1 x_2}{v})\} \quad (20)$$

A étant une constante numérique

de E.R. VAN DRIEST (1956)

$$l = c^{te} x_2 \{1 - \exp(-A \frac{x_2 v_*}{v})\} \quad (21)$$

soit $\sigma = c^{te} x_2^2 \{1 - \exp(-A \frac{x_2 v_*}{v})\}^2 |\bar{v}_{1,2}|$

Le schéma de E.R. VAN DRIEST est utilisé par B.E. LAUNDER et W.P. JONES (1968) /42/ pour la prévision numérique de la laminarisation d'une couche limite soumise à une forte accélération. Dans ce cas A a été supposé fonction du gradient de vitesse extérieur.

De nombreuses variantes de ces hypothèses ont été introduites par divers auteurs dans les méthodes de calcul des couches-limites turbulentes. Les hypothèses portant sur l'expression de σ s'expriment généralement sous la forme

$$\sigma = x_2 v_* f(\frac{x_2 v_*}{v})$$

où f est une fonction universelle pour un type d'écoulement donné.

Un schéma dérivé de celui de VAN DRIEST est utilisé par R.H. PLETCHER (1970, 1972) /43/ /44/. S.V. PATANKAR et D.B. SPALDING (1970) /10/ généralisent la formule de VAN DRIEST (21) en remplaçant la contrainte à la paroi directement liée à v_* par la contrainte locale τ

$$\ell = c \frac{t_e}{v} x_2 \left\{ 1 - \exp \left(- A \frac{x_2}{v} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \right) \right\} \quad (22)$$

B.E. LAUNDER et W.P. JONES /6/ étudiant la laminarisation ont ensuite proposé un schéma amélioré

$$\ell = c \frac{t_e}{v} x_2 \left\{ 1 - \exp \left(- A \frac{x_2}{v} \frac{\tau}{v_*} \right) \right\} \quad (23)$$

L'emploi de ce modèle a récemment été étendu à l'étude de la couche limite sur une surface poreuse avec injection soumise à d'importants gradients de pression longitudinaux par R.J. BAKER et B.E. LAUNDER (1974) /45/.

G.L. MELLOR et D.M. GIBSON (1966) /46/ obtiennent des solutions de profil de vitesse dans la couche limite, hors de la sous-couche visqueuse en utilisant l'hypothèse de F.H. CLAUSER (16) dans la région externe et l'hypothèse de longueur de mélange sous sa forme (14) dans la région intermédiaire.

T. CEBECI, A.M.O. SMITH et G. MOSINSKI (1970) /47/ et T. CEBECI /48/ utilisent l'hypothèse de F.H. CLAUSER dans la région externe de la couche limite modifiée par un facteur d'intermittence et l'hypothèse de VAN DRIEST près de la paroi.

G.L. MELLOR et J.R. HERRING (1968) /14/ introduisent trois hypothèses pour les différentes régions de la couche limite, dans la région visqueuse

$$v + \sigma = v f \left(k \frac{x_2}{v} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \right)$$

dans la région externe

$$u + \sigma = v_m \delta_* g \left(\frac{x_2}{v_m \delta_*} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \right)$$

et dans la couche intermédiaire

$$u f = v_m \delta_* g$$

ce qui implique

$$f \sim \kappa \frac{x_2}{v_m \delta_*} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad \text{et} \quad g \sim \frac{x_2}{v_m \delta_*} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

Ces relations empiriques sont regroupées en une seule formulation en remarquant que $u + \sigma = x_2 \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ est asymptote commune aux lois f et g .

$$\frac{u + \sigma}{v_m \delta_*} = \frac{u}{v_m \delta_*} f \left(\frac{x_2}{v_m \delta_*} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \right) + g \left(\frac{x_2}{v_m \delta_*} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \right) - \frac{x_2}{v_m \delta_*} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad (24)$$

les fonctions f et g ayant été déduites des profils expérimentaux.

R.M. KENDALL et L.W. ANDERSON (1968) /14/ divisent l'écoulement en deux régions, une région externe dans laquelle la loi (16) de CLAUSER est retenue et une région interne dans laquelle une hypothèse de longueur de mélange est introduite, l étant donné par une équation différentielle

$$l_{,2} = \frac{\kappa x_2 - l}{x_a} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad (25)$$

qui sous forme intégrée conduit à

$$l = \kappa \left\{ x_2 - x_a \left(1 - e^{-\frac{x_2}{x_a}} \right) \right\}$$

Un schéma amélioré de longueur de mélange est proposé par J. COUSTEIX, C. QUEMARD et R. MICHEL (1968) /14/ qui utilisent la formule universelle suivante.

$$\frac{\ell}{\delta} = 0,085 \operatorname{th} \left(\frac{\kappa}{0,085} \frac{x_2}{\delta} \right) \quad (26)$$

Dans la sous-couche visqueuse une fonction correctrice F a été introduite pour traduire l'influence de la viscosité sur le frottement turbulent.

$$F = 1 - \exp \left(\frac{-1}{26 \kappa \mu} \sqrt{\tau_0} \right)$$

où
$$\tau = \mu \bar{v}_{1,2} + \rho F^2 \ell^2 |\bar{v}_{1,2}| \bar{v}_{1,2}$$

L'application du schéma a été étendue par les auteurs au cas de couches limites turbulentes tridimensionnelles /49/ et par T. LILI et R. MICHEL /50/ à l'étude des couches limites avec injection.

G. KLEINSTEIN (1967) /51/ a proposé un modèle de viscosité turbulente en prenant la vitesse réduite comme variable indépendante.

c) Dans les tubes circulaires une expression de la longueur de mélange a été donnée par J. NIKURADSE (1932)

$$\frac{\ell}{R} = 0,14 - 0,08 (1-\eta)^2 - 0,06 (1-\eta)^4 \quad (27)$$

R étant le rayon du tube et $\eta = x_2/R$

L'hypothèse formulée par J. GOSSE (1961) /52/ qui suppose σ proportionnel à $\{1 - (1-\eta)^2\}$ conduit à des profils de vitesse en bon accord avec les résultats expérimentaux à la fois pour les tubes et les couches limites.

L.D. LANDAU et V.G. LEVICH (1962) /53/ étudient plus particulièrement la sous-couche visqueuse et supposent que dans cette région

l'interaction tourbillonnaire cesse et l'écoulement devient alors une somme de mouvements périodiques indépendants et de période constante à travers la sous-couche, les auteurs arrivent à la conclusion que σ est proportionnel à

$$\propto \left(\frac{x_2}{\delta} \right)^4$$

près de la paroi.

Des modèles de viscosité turbulente sont également introduits par R.H. KORKEGI et A.R. BRIGGS (1968) /54/ qui utilisent la relation de VON KARMAN puis par S.H. CHUE et A.T. Mc DONALD (1970) /55/ pour le calcul de l'écoulement de COUETTE.

Des modèles de viscosité turbulente applicables aux écoulements en conduite sont proposés par G. KLEINSTEIN (1971) /56/ qui introduit une hypothèse valable pour toute la section du tube, puis par J. MEI et W. SQUIRE (1972) /57/.

d) Le transfert de chaleur et de masse dans les écoulements turbulents a été étudié par des approches du même type. Le flux d'une grandeur scalaire ϕ attachée au champ turbulent et pouvant représenter une température ou une concentration sera exprimé sous la forme

$$\overline{v'_2 \phi'} = - \sigma_\phi \bar{\phi}_{,2} \quad (28) \text{ analogue à (6)}$$

En faisant apparaître le nombre de PRANDTL turbulent $Pr_t = \frac{\sigma}{\sigma_\phi}$, (28) peut aussi s'écrire

$$\overline{v'_2 \phi'} = - \frac{\sigma}{Pr_t} \bar{\phi}_{,2}$$

La valeur du nombre de PRANDTL turbulent est souvent supposée constante dans l'écoulement, mais sa valeur dépend en réalité beaucoup de la géométrie. En effet, si $Pr_t \approx 1$ dans la région centrale des conduites (analogie de REYNOLDS) il n'en est pas de même dans les écoulements libres comme les jets turbulents dans lesquels $Pr_t \approx 0,5$

L'hypothèse de longueur de mélange de L. PRANDTL appliquée au transfert de la grandeur ϕ s'exprime par

$$\phi' = \ell \bar{\phi}_{,2} \quad \text{et} \quad \sigma = - \overline{v_2'} \ell = \ell^2 |\bar{v}_{1,2}|$$

$$\overline{v_2' \phi'} = \rho C_p \ell^2 |\bar{v}_{1,2}| \bar{\phi}_{,2} \quad (29)$$

Cette hypothèse conduit donc à des profils de température et de concentration identiques au profil de vitesse (résultat qui n'est pas vérifié par l'expérience dans les écoulements libres en particulier).

Par contre dans la théorie de G.I. TAYLOR de la turbulence libre, la longueur ℓ_T est $\sqrt{2}$ fois plus grande que la longueur de mélange de L. PRANDTL, alors que le mécanisme de diffusion de ϕ demeure le même, il en résulte donc une équation différente pour ϕ . Les profils de température ou de concentration obtenus dans les jets libres sont différents des profils de vitesse, on a plus précisément

$$\sqrt{\frac{\bar{v}}{\bar{v}_m}} = \frac{\bar{\phi}}{\bar{\phi}_m}$$

Dans les écoulements turbulents près des parois et aux faibles nombres de REYNOLDS, le nombre de PRANDTL turbulent peut dépendre du nombre de PRANDTL moléculaire. Des modèles de calcul du nombre de PRANDTL turbulent ont été étudiés par F.H. HARLOW (1968) /82/ R.L. SIMPSON, D.G. WHITTEN et P.J. MOFFAT (1970) /58/, T. CEBECI (1973) /59/.

Une approche différente du transfert par turbulence est proposée par B.E. LAUNDER et D.B. SPALDING /6/ qui introduisent un modèle à deux flux opposés.

e) Les théories qui utilisent le concept de viscosité de turbulence ou celles qui sont basées sur la notion de longueur de mélange présentent l'avantage d'une formulation très simple et demeurent très exploitées car elles peuvent fournir de bonnes prévi-

sions de l'écoulement moyen, cela en particulier dans les écoulements libres cisailés. Cependant, ces modèles ne peuvent être corrects en principe /12/ et de sévères limitations théoriques apparaissent en particulier lorsque l'écoulement présente plusieurs échelles de vitesse caractéristiques.

Les contraintes de REYNOLDS ne sont pas une propriété locale de l'écoulement, mais dépendant de la convection, de la diffusion turbulente, de l'histoire passée de l'écoulement, et les théories de longueur de mélange ne peuvent tenir compte de leur influence.

I-3.2 Modèles de turbulence à une équation de transport

Afin d'éviter les inconvénients des théories précédentes A.N. KOLMOGOROFF (1942) et L. PRANDTL (1945) ont proposé d'exprimer la viscosité turbulente en reliant l'échelle de vitesse à l'énergie cinétique de la turbulence

$$\sigma = \ell \sqrt{q} \quad (30)$$

Le tenseur de REYNOLDS pourra alors être formulé de manière générale /5 p.20/ /75/

$$R_{ij} = \frac{2}{3} q \delta_{ij} - \ell \sqrt{q} (\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{j,i}) \quad (31)$$

Une forme plus élaborée pour R_{ij} fait usage d'un tenseur d'échelle ℓ_{ij} /8 p.388/

$$R_{ij} = \frac{2}{3} q \delta_{ij} - \sqrt{q} (\ell_{ik} S_{kj} + \ell_{jk} S_{ki}) \quad (32)$$

avec
$$S_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{j,i})$$

Une approche différente est proposée par A.A. TOWNSEND (1956) et M.J. LIGHTHILL (1956) /13/ /60/

$$R_{ij} = \frac{2}{3} q \delta_{ij} - 0,4 q \frac{S_{ij}}{(S_{kt} S_{kt})^{1/2}} \quad (33)$$

a) L'énergie cinétique de turbulence qui intervient dans l'expression de σ et de R_{ij} devra être déterminée à partir d'une équation de transport.

La différence membre à membre des équations de NAVIER-STOKES (2) et de REYNOLDS (5) fournit l'évolution de la vitesse fluctuante

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_i}{\partial t} + \bar{v}_k v'_{i,k} = & - v'_k \bar{v}_{i,k} - \overline{v'_k v'_{i,k}} - \pi'_{,i} \\ & + \nu v'_{i,kk} + R_{ik,k} \end{aligned} \quad (34)$$

La différence des équations (1) et (4) fournit de même :

$$v'_{k,k} = 0 \quad (35)$$

L'équation de transport de q résulte directement de (34) et de la définition de q

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \bar{v}_k q_{,k} = & - R_{ij} \bar{v}_{i,j} - \overline{(v'_j q')}_{,j} - \overline{(v'_j \pi')}_{,j} \\ & - \nu \overline{v'_{j,k} v'_{j,k}} + \nu q_{,kk} \end{aligned} \quad (36)$$

Le premier membre représente la dérivée particulaire, somme de la dérivée partielle par rapport au temps et de la convection, tandis que les termes du second membre correspondent respectivement à la production d'énergie turbulente prélevée sur l'énergie du mouvement moyen, la diffusion turbulente de l'énergie cinétique des fluctuations de vitesse et celle due aux fluctuations de pression, la dissipation visqueuse et la diffusion moléculaire. A partir de cette forme générale (36) des hypothèses sont introduites qui permettent de relier les corrélations inconnues du second membre aux grandeurs moyennes connues.

Les modèles du type KOLMOGOROFF-PRANDTL introduisent les hypothèses suivantes :

$$\overline{v'_i q'} + \overline{v'_i \pi'} = - A_q \sigma q_{,i}$$

$$E = \overline{v'_{i,j} v'_{i,j}} = A_D q^{3/2}/\ell \quad (37)$$

L'équation approchée de q dans le cas d'un écoulement bidimensionnel cisailé pleinement turbulent s'écrit :

$$\frac{dq}{dt} = \sigma (\bar{v}_{1,2})^2 + A_q (\sigma q_{,2})_{,2} - A_D q^{3/2}/\ell \quad (38)$$

A_q et A_D sont des constantes numériques à fixer, A_D peut être déterminée par exemple à partir des résultats connus sur la turbulence de paroi.

L'équation (38) est résolue avec l'équation du mouvement pour une distribution d'échelle donnée.

Le modèle de KOLMOGOROFF-PRANDTL a été la base des méthodes de calcul de G.S. GLUSHKO (1965) pour la couche-limite et H.W. EMMONS (1954) pour les écoulements libres cisailés. La théorie développée par G.S. GLUSHKO a été étendue au calcul de couches-limites sujettes à de forts gradients de pression par T.E. BECKWITH et D.M. BUSHNELL (1968) /14/.

Une deuxième méthode proposée par G.L. MELLOR et J.R. HERRING (1968) /14/ pour le calcul des couches-limites fait usage de l'équation de transport de q . L'hypothèse précédente sur la couche visqueuse est remplacée par

$$\sigma + \nu = \nu f \left(\frac{x_2 \sqrt{q}}{\nu} \right)$$

et l'hypothèse sur la région externe devient

$$\sigma + \nu = Q g \left(\frac{x_2 \sqrt{q}}{Q} \right) \quad \text{où } Q = \int_0^\infty \sqrt{q} dx_2$$

L'équation d'énergie sous sa forme (38) est également utilisée par L.J.S. BRADBURY (1971) /61/ pour l'étude du jet plan turbulent. L'échelle ℓ est supposée dans ce cas proportionnelle à l'épaisseur

δ du jet et les calculs sont effectués dans le cadre d'une hypothèse de similitude.

L'extension du modèle à l'étude de la zone visqueuse près d'une paroi nécessite l'introduction des termes de diffusion moléculaire. Dans ce domaine des faibles nombres de REYNOLDS, M. WOLFSTEIN (1969) /62/ est conduit à utiliser deux échelles différentes, une échelle de viscosité ℓ_μ et une échelle de dissipation ℓ_D

$$\begin{aligned}\ell_\mu &\sim x_2 \left\{ 1 - \exp \left(A_\mu \frac{x_2 \sqrt{q}}{v} \right) \right\} \\ \ell_D &\sim x_2 \left\{ 1 - \exp \left(A_D \frac{x_2 \sqrt{q}}{v} \right) \right\}\end{aligned}\tag{39}$$

A_μ et A_D étant des constantes numériques.

Le modèle est appliqué par l'auteur à l'écoulement de COUETTE et à l'écoulement en conduite.

Une théorie phénoménologique proposée par V. NEVZGLJADOV (1945) /63/ introduit sur les termes de l'équation de q des hypothèses un peu différentes.

$$\begin{aligned}R_{ij} &= \frac{2}{3} q \delta_{ij} - Aq (\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{j,i}) \\ \overline{q' v'_i} &= - A_q q q_{,i} \\ \overline{\pi' v'_i} &= - A_\pi q \bar{\pi}_{,i} \\ E &= g_1 q + g_2 q^\alpha\end{aligned}\tag{40}$$

A, A_q, A_π, g_1, g_2 sont des coefficients constants et α un exposant fractionnaire.

Une approche différente est proposée par T.H. GAW AIN et J.W. PRITCHETT (1970) /64/ dont les travaux apparaissent comme une généralisation de l'hypothèse de VON KARMAN.

L'échelle de la turbulence est définie par $l^2 = I^2/J^2$

avec
$$I^2 = \int w(\vec{x}, \vec{x}') \Omega^4(\vec{x}') dV$$

$$J^2 = \int w(\vec{x}, \vec{x}') \Omega^2(\vec{x}') \Omega'^2(\vec{x}') dV$$

où $w(\vec{x}, \vec{x}')$ est une fonction de poids, $\Omega^2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$

et $\Omega'^2 = \Omega_{,j} \Omega_{,j}$

Les hypothèses de fermeture suivantes

$$\overline{v_1' q'} + \overline{v_1' \pi'} = -A_q \sigma q_{,j}$$

$$E = A_D q^{7/6} J^{1/3} \quad (41)$$

sont introduites dans l'équation de q en tenant compte de $\sigma = A l \sqrt{q}$

T.S. LUNDGREN et F.C. WANG (1973) /65/ étudiant les écoulements turbulents libres qui présentent un interface turbulent - non turbulent utilisent un modèle de viscosité turbulente donnée par la relation

$$\sigma = A \frac{q^2}{E + \frac{dq}{dt}} \quad (42)$$

cette hypothèse déjà utilisée dans /35/ se situe dans la lignée des travaux /33/ et /34/ sur un modèle d'équation cinétique. Les équations conduisent à des solutions présentant un saut de l'énergie turbulente à travers l'interface.

b) D'autres types d'approches à une seule équation de transport ont été formulées. Dans l'approche proposée par P. BRADSHAW, D.H. FERRISS et N.P. ATWELL (1967) /66/ /14/ le concept de viscosité de turbulence n'est plus utilisé. L'équation d'énergie cinétique de turbulence est transformée en une équation pour la tension de cisaillement turbulent, cela en définissant trois fonctions empiriques

reliant l'intensité de turbulence , la diffusion et la dissipation au profil de tension de cisaillement.

$$a_1 = \frac{R_{12}}{2q} \quad L = \frac{R_{12}^{3/2}}{E}$$

$$G = \frac{\pi' v'_2 + q' v'_2}{R_{12} \sqrt{R_{12 \max}}} \quad (43)$$

où $R_{12 \max}$ représente la tension de cisaillement maximum à l'abscisse considérée. Cette équation de R_{12} , jointe à celle du mouvement forme un système hyperbolique résolu par la méthode des caractéristiques. Si la méthode a l'avantage de ne pas introduire de viscosité turbulente, l'hypothèse $a_1 = C^{te}$ utilisée par les auteurs a un domaine de validité limité à des couches limites sans maximum de vitesse.

La méthode a été étendue au calcul de couches limites tridimensionnelles par J.F. NASH (1969) /67/, P. BRADSHAW (1971) /68/ et P. WESSELING et J.P.F. LINDHOUT (1971) /69/.

La théorie de W. NEE et L.S.G. KOVASZNY (1969) /70/ est formulée de manière à tenir compte de façon simple des mécanismes de diffusion et de dissipation par turbulence et de l'histoire du fluide turbulent. Une seule équation de transport pour la viscosité apparente $\sigma_e = \sigma + \nu$ est construite

$$\frac{d \sigma_e}{dt} = (\sigma_e \sigma_{e,2})_{,2} + G - D$$

$$G = A (\sigma_e - \nu) |\bar{v}_{1,2}| \quad (44)$$

$$D = B (\sigma_e - \nu) \sigma_e / \ell^2$$

A et B sont des constantes universelles et ℓ une longueur caractéristique fonction de x_2 qui pourra être prise égale à δ dans la région externe et proportionnelle à x_2 près de la paroi.

Initialement appliquée à la couche limite sans gradient de pression, la méthode a été étendue par les mêmes auteurs /14/ au cas d'écoulements avec gradient de pression par l'emploi d'un terme additionnel dans l'équation (44)

$$P = - C \frac{\sigma_e (\sigma_e - v)}{v_m v_{m,1}} (\bar{v}_{1,2})$$

C étant une constante numérique et v_m la vitesse du fluide au loin.

Une méthode de calcul de sillages turbulents bidimensionnels proposée par S.C. LEE et J.E. AUILER (1970) /71/ utilise outre l'équation de transport de l'énergie cinétique de la turbulence sous une forme analogue à (38) une hypothèse sur la contrainte de cisaillement turbulent à rapprocher de (33).

$$R_{12} = a_1 q \frac{\bar{v}_{1,2}}{|v_{1,2}|} \quad (45)$$

a_1 constante d'origine expérimentale

Suivant l'axe de symétrie R_{12} s'annule alors que q reste non nul, une approximation de a_1 au voisinage de cette région est donnée par S.C. LEE et P.T. HARSHA (1970) /72/.

$$a_1 = 0,3 \frac{|\bar{v}_{1,2}|}{|\bar{v}_{1,2 \max}|} \quad (46)$$

$\bar{v}_{1,2 \max}$ étant la valeur maximale de $\bar{v}_{1,2}$ à la position x_1 considérée.

L'étude comparative de trois types de modèles (PATANKAR - SPALDING, NEE - KOVASZNAY, KOLMOGOROFF - PRANDTL) appliqués à la couche limite par A.T. WASSEL et I. CATTON (1973) /73/ conduit à la conclusion que le schéma de PATANKAR et SPALDING dérivé de l'hypothèse

de VAN DRIEST, malgré l'image très approximative qu'il donne du mélange turbulent permet de bonnes prévisions des vitesses de frottement et transfert de chaleur. Les deux autres modèles, même s'ils impliquent une meilleure description des mécanismes turbulents, sont plus difficiles à utiliser.

I-3.3. Modèles à plusieurs équations de transport

a) Les modèles basés sur l'emploi d'une seule équation de transport pour l'énergie turbulente ne peuvent, tout comme les théories de longueur de mélange, être appliqués qu'à des géométries simples pour lesquelles une hypothèse plausible sur l'échelle l peut être formulée. Dans bien des cas pratiques on ne peut pas aisément donner une expression algébrique pour l et il y aura avantage à calculer l par une équation d'évolution supplémentaire.

Une première tentative dans ce sens est faite par A.N. KOLMOGOROFF (1942) /6/ qui propose une équation d'évolution de la quantité $f = \sqrt{q}/l$ homogène à une fréquence.

Cette même quantité est utilisée par P.G. SAFFMAN (1970) /74/ qui propose les équations fondamentales suivantes

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= A_p q \sqrt{S_{ij} S_{ij}} - A_D f q + A_q (\sigma q_{,i})_{,i} \\ \frac{df^2}{dt} &= B_p f^2 \sqrt{\bar{v}_{i,j} \bar{v}_{i,j}} - B_D f^3 + B_f (\sigma f^2_{,i})_{,i} \end{aligned} \quad (47)$$

avec $\sigma = \alpha q/f$

Les coefficients A , B et α étant des constantes universelles.

Le modèle de F.H. HARLOW et P.I. NAKAYAMA (1967) /75/ comprend, en plus de l'équation d'énergie turbulente, une équation d'évolution pour la micro-échelle s de turbulence construite par analogie avec l'équation de LANGEVIN pour le mouvement Brownien. Le taux de

dissipation d'énergie par viscosité est exprimé à l'aide de la formule $E = 2 \Delta \frac{uq}{s^2}$ (48) dans laquelle Δ est une fonction universelle du nombre de REYNOLDS de turbulence σ/u et une relation simple entre q et σ est obtenue par la formule de PRANDTL - WIEGHARDT

$$q = c_{te} \left(\frac{\sigma}{s} \right)^2 \quad (49)$$

F.H. HARLOW et P.I. NAKAYAMA (1968) /76/ déduisent une forme générale de l'équation de transport du taux de dissipation d'énergie turbulente E à partir de l'équation d'évolution de la vitesse fluctuante (34). Suivant la même démarche que celle qui a conduit à l'équation de q , des hypothèses de fermeture sont introduites en approchant les corrélations inconnues dans cette équation. Le système à résoudre s'écrit finalement

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \sigma (\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{j,i}) \bar{v}_{i,j} + A_{\pi} (\sigma \bar{\pi}_{,i})_{,i} \\ &\quad + \{(\nu + A_q \sigma) q_{,i}\}_{,i} - E \\ \frac{dE}{dt} &= B_p \frac{u\Delta}{s^2} (\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{j,i}) \bar{v}_{i,j} - 2 \nu \frac{\Delta'}{s^2} E \\ &\quad + B_q \frac{u\Delta}{s^2} (\sigma q_{,i})_{,i} + \{(\nu + B_E \sigma) E_{,i}\}_{,i} \\ &\quad + B_{\pi} \left(\frac{u\Delta}{s^2} \sigma \pi_{,i} \right)_{,i} \end{aligned} \quad (50)$$

auquel s'ajoutent les relations (48) et (49).

Δ' étant une nouvelle fonction universelle de σ/u

D.B. SPALDING (1972) /77/ détermine l'évolution de l'échelle de turbulence à partir d'une équation pour la quantité $W = q/\ell^2$ interprétée comme la valeur quadratique moyenne des fluctuations de vorticité.

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = & B_{p1} \frac{W}{q} \sigma (\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{j,i}) \bar{v}_{i,j} + B_{p2} \sigma \omega_{,i} \omega_{,i} \\ & - B_D W^{3/2} + B_W (\sigma W_{,i})_{,i} \end{aligned} \quad (51)$$

où $\sigma = \frac{q}{W^{1/2}}$ et $\omega^2 = \bar{v}_{i,j} \bar{v}_{i,j} - \bar{v}_{i,j} \bar{v}_{j,i}$

Les constantes numériques relatives aux termes source peuvent être fixées par application des équations d'une part à l'écoulement près d'une paroi dans la zone des profils logarithmiques de vitesse et d'autre part à la décroissance de la turbulence derrière une grille. Les exploitations numériques du modèle portent sur des écoulements assez variés.

Le modèle employé par D.B. SPALDING (1969) /78/ et par W. RODI et D.B. SPALDING (1970) /79/ est construit à partir d'une simplification des équations de J.C. ROTTA (1951). L'évolution du produit $q \ell$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{d(q\ell)}{dt} = & B_p \sigma \ell (\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{j,i}) \bar{v}_{i,j} - B_D q^{3/2} \\ & + B_{q1} \{\sigma (q \ell)_{,i} + B_\ell \sigma \ell q_{,i}\}_{,i} \end{aligned} \quad (52)$$

W. RODI et D.B. SPALDING obtiennent des résultats en bon accord avec l'expérience concernant les écoulements libres, jets et zones de mélange.

Le même type d'équation, avec cependant un ajustement légèrement différent des constantes numériques, est utilisé par K.H. NG et D.B. SPALDING (1972) /80/ pour la description des écoulements près des parois.

Afin de traiter le cas d'écoulements aux faibles nombres de REYNOLDS ainsi que la description de la sous-couche visqueuse près d'une paroi M. WOLFSHTEIN (1970) /81/ retient dans l'équation d'échelle

plusieurs termes complémentaires.

$$\begin{aligned} \frac{d(q\ell)}{dt} = & B_p \sigma \ell (\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{j,i}) \bar{v}_{i,j} - B_D q^{3/2} \\ & - B_{D\ell} \frac{\ell^2}{\sqrt{q}} q_{,i} q_{,i} + B_{q\ell} \{\sigma(q\ell)_{,i}\}_{,i} \\ & + v(q\ell)_{,ii} \end{aligned} \quad (53)$$

avec $\sigma = C_\mu \ell \sqrt{q}$

les coefficients B et C_μ sont, dans ce cas, des fonctions universelles du nombre de REYNOLDS de turbulence $\frac{\ell \sqrt{q}}{v}$

F.H. HARLOW (1968) /82/ généralise la théorie /76/ à l'étude de la turbulence de faible intensité et donne une justification théorique d'une modification à apporter à la loi de diffusion turbulente. Le flux de diffusion de la grandeur ϕ attachée au champ turbulent est exprimé sous la forme

$$\overline{v'_i \phi'} = A_\phi \frac{\sigma^2}{\lambda} (1 - e^{-\alpha \frac{\lambda}{\sigma}}) \bar{\phi}_{,i} \quad (54)$$

λ étant la diffusivité moléculaire de la grandeur ϕ
 A_ϕ et α des constantes numériques.

Lorsque $\frac{\sigma}{v} \rightarrow \infty$ la loi simple utilisée précédemment est retrouvée.

Le même type d'équation que (50) est utilisé par W.P. JONES et B.E. LAUNDER (1972) /83/, (1973) /84/, complétées par des termes additionnels qui permettent l'étude des écoulements aux faibles nombres de REYNOLDS et l'application au phénomène de relaminarisation de la couche limite.

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} = & \sigma (\bar{v}_{1,2})^2 + \{(v + A_q \sigma) q_{,2}\}_{,2} - E \\ & - 2 v (\sqrt{q})_{,2} (\sqrt{q})_{,2} \end{aligned} \quad (55)$$

$$\frac{dE}{dt} = B_P \frac{E}{q} \sigma (\bar{v}_{1,2})^2 + \{(\nu + B_E \sigma) E_{,2}\}_{,2} - B_D \frac{E^2}{q} + 2 \nu \sigma (\bar{v}_{1,22})^2$$

Avec $\sigma = C_\mu q^2/E$

C_μ et B_D fonctions universelles de $q^2/\nu E$

G.S. GLUSHKO (1972) /85/ obtient une équation pour l'échelle intégrale définie par

$$L = \frac{3}{16 \pi} \iiint_{\Lambda} Q \frac{d \vec{\xi}}{\xi^2} \quad (56)$$

où

$$Q = \frac{v_j^! (\vec{x}) v_j^! (\vec{x} + \vec{\xi})}{v_j^! (\vec{x}) v_j^! (\vec{x})} \quad / \quad \frac{v_j^! (\vec{x}) v_j^! (\vec{x})}{v_j^! (\vec{x}) v_j^! (\vec{x})}$$

Cette équation permet de compléter un modèle antérieur de G.S. GLUSHKO (1965) comprenant une seule équation pour q et appliqué à la couche-limite sur plaque plane.

Dans le cadre du modèle basé sur les équations de transport de q et W , D.B. SPALDING (1971) /86/ a construit une équation parabolique d'évolution de la valeur quadratique moyenne des fluctuations de concentration. L'application numérique conduit à un bon accord avec les données expérimentales sur le jet circulaire turbulent.

b) Les modèles à deux équations ne se sont pas révélés d'un caractère suffisamment universel pour recouvrir le champ des applications pratiques. Le fait que D.B. SPALDING /77/ et W. RODI, D.B. SPALDING /79/ aient été amenés à modifier les constantes empiriques dans chacun des deux modèles pour l'étude particulière du jet circulaire turbulent est un exemple frappant. La recherche d'une meilleure prévision applicable à des cas d'écoulements aussi variés que possible et valable dans les géométries plus compliquées a conduit vers la formulation de modèles plus élaborés faisant intervenir de nombreuses équations de transport.

L'emploi d'équations de transport pour toutes les contraintes de REYNOLDS permet d'éviter l'introduction de l'hypothèse de viscosité turbulente dans l'équation du mouvement. L'équation générale d'évolution de R_{ij} peut être obtenue directement à partir de l'équation (34) de la vitesse fluctuante et de la définition de $R_{ij} = \overline{v'_i v'_j}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + \bar{v}_k R_{ij,k} = & - R_{ik} \bar{v}_{j,k} - R_{jk} \bar{v}_{i,k} \\ & - \overline{(v'_i v'_j v'_k)_{,k}} - \overline{(v'_i \pi')_{,j}} - \overline{(v'_j \pi')_{,i}} \\ & + \overline{\pi' (v'_{i,j} + v'_{j,i})} - 2 \nu \overline{v'_{i,k} v'_{j,k}} + \nu R_{ij,kk} \end{aligned} \quad (57)$$

Une des premières théories phénoménologiques plus élaborées fut proposée par P.Y. CHOU (1945) /87/ /88/. Les corrélations de dissipation sont approchées à l'aide de l'expression

$$2 \nu \overline{v'_{i,k} v'_{j,k}} = - \frac{4}{3} \frac{\nu}{\Delta^2} (k - 5) q \delta_{ij} + \frac{2 \nu k}{\Delta^2} R_{ij} \quad (58)$$

Δ étant la microéchelle de turbulence et k une constante numérique.

Utilisant d'autre part le fait que les fluctuations de pression satisfont une équation de POISSON, P.Y. CHOU exprime le terme de redistribution d'énergie par les corrélations de pression sous forme de série :

$$\overline{v'_i \pi'_{,j}} + \overline{v'_j \pi'_{,i}} = A_{nmij} \bar{v}_{n,m} + B_{ij} \quad (59)$$

L'échelle de turbulence s est définie à partir de la valeur quadratique moyenne des fluctuations de vorticité par la relation

$$- (\Delta_\xi \overline{v'_j (\vec{x}) v'_j (\vec{x} + \vec{\xi})})_\xi = 0 = \frac{10 q}{\Delta^2} \quad (60)$$

qui permet de construire une équation d'évolution de $\frac{q}{\delta^2}$

La fermeture du système n'est réalisée qu'avec l'introduction des équations de transport des corrélations triples

$$\overline{T_{ijk}} = \overline{v'_i v'_j v'_k}$$

Le modèle de J.C. ROTTA (1951) /89/ /90/ utilise l'ensemble des équations des corrélations doubles avec les principales hypothèses.

$$2 \overline{v'_{i,k} v'_{j,k}} = \nu A_{D1} \frac{R_{ij}}{\ell^2} + \frac{2}{3} A_{D2} \frac{q^{3/2}}{\ell} \delta_{ij} \quad (61)$$

$$\overline{\pi' (v'_{i,j} + v'_{j,i})} = P_{ij}^{(1)} + P_{ij}^{(2)}$$

Le premier terme, favorise l'isotropie dans une turbulence homogène, et a été formulé de manière intuitive

$$P_{ij}^{(1)} = - A_{\pi} \frac{\sqrt{q}}{\ell} (R_{ij} - \frac{2}{3} q \delta_{ij})$$

La contribution du second terme a été mise sous forme d'un développement en série

$$P_{ij}^{(2)} = a_{lj}^{mi} \bar{v}_{l,m} + b_{nj}^{mi} \bar{v}_{l,mn} + c_{nk}^{mi} \bar{v}_{l,mnk}$$

obtenu à partir de l'équation de POISSON vérifiée par les fluctuations de pression.

L'échelle de turbulence est définie à partir du spectre moyen $E(k)$ par

$$\ell = \frac{1}{q} \int_0^{\infty} \frac{E(k)}{k} dk \quad (62)$$

J.C. ROTTA (1971) /91/ propose une nouvelle version du modèle adaptée à l'étude des écoulements bidimensionnels cisailés et montre l'importance de la formulation du terme de production dans l'équation d'échelle pour l'universalité du modèle.

A partir de considérations sur la forme du spectre d'énergie turbulente B.G. TRUSOV (1972) /92/ examine la relation entre l'intensité et la dissipation de l'énergie turbulente. Les résultats sont mis sous la forme

$$\frac{Eu}{q^2} = f\left(\frac{\ell \sqrt{q}}{u}\right)$$

f étant une fonction universelle tabulée du nombre de REYNOLDS de turbulence, qui généralise l'hypothèse (61) de J.C. ROTTA.

Un schéma de turbulence plus complexe encore est proposé par B.I. DAVIDOV (1958) /8 p. 379/ qui retient toutes les équations de transport des corrélations doubles et triples, une équation de transport pour E ainsi que pour le flux

$$\gamma_k = u \overline{v'_k v'_{i,j} v'_{i,j}}$$

C. du P. DONALDSON (1969) /93/ développa un modèle dans le but de prédire la transition dans la couche-limite et introduisit pour cela les équations de transport de R_{ij} mais retint une formulation algébrique pour l'échelle de turbulence. L'auteur examine également (1971) /94/ la possibilité d'étendre la méthode d'approche à des écoulements turbulents en réaction chimique.

Les idées introduites par F.H. HARLOW et P.I. NAKAYAMA (1968) ont été appliquées par F.H. HARLOW et C.W. HIRT (1969) /95/ aux composantes du tenseur de REYNOLDS, ce qui permet d'éviter l'introduction de la viscosité turbulente.

Diverses améliorations ont été apportées à la théorie générale par C.W. HIRT (1969) /96/ puis B.J. DALY et F.H. HARLOW (1970) /97/. Les principales hypothèses sur les corrélations de l'équation (57) peuvent se résumer par :

$$\overline{2 v'_{i,k} v'_{j,k}} = 2 \frac{\Delta}{\delta^2} R_{ij}$$

$$\overline{(v'_i v'_j v'_k)_{,k}} = - \left(A \frac{\delta^2 R_{kl}}{u \Delta} R_{ij,l} \right)_{,k} \quad (63)$$

$$\overline{\pi' (v'_{i,j} + v'_{j,i})} = - \omega \frac{u \Delta}{\delta^2} (R_{ij} - \frac{2}{3} q \delta_{ij}) + P_{ij}$$

où

$$\omega = \omega_0 - \omega_1 \frac{\delta^2}{u \Delta q} R_{kl} \bar{v}_{k,l}$$

A, ω_0 , ω_1 étant des constantes et P_{ij} un tenseur représentant l'effet des parois dans la redistribution d'énergie turbulente.

Des compléments sont donnés par J. GOSSE (1969, 1970) /98/ /99/ /100/ /101/ au modèle de C.W. HIRT, B.J. DALY et F.H. HARLOW par l'introduction d'une autodiffusion massique due à l'agitation turbulente qui s'ajoute au mouvement continu des particules.

Un modèle général est formulé par K. HANJALIC et B.E. LAUNDER (1972) /102/ basé sur les mêmes équations générales de transport, les hypothèses introduites étant légèrement différentes en particulier

$$2 u \overline{v'_{i,k} v'_{j,k}} = \frac{2}{3} E \delta_{ij}$$

(traduisant l'isotropie de la microturbulence)

$$\overline{v'_i v'_j v'_k} = - A \frac{q}{E} (R_{il} R_{jk,l} + R_{jl} R_{ki,l} + R_{kl} R_{ij,l}) \quad (64)$$

$$\overline{\pi' (v'_{i,j} + v'_{j,i})} = - C \frac{E}{q} (R_{ij} - \frac{2}{3} q \delta_{ij}) + a_{lj}^{mi} \bar{v}_{l,m}$$

B.A. KOLOVANDINE et I.A. VATUTINE (1969) /103/ (1972) /104/ proposent un système très élaboré d'équations de transport de la turbulence qui comprend outre les équations d'évolution des corrélations doubles et triples et de l'échelle de turbulence, des équations aux dérivées partielles fournissant les corrélations de pression. Des expressions approchées des corrélations doubles non isotropes en deux points distincts ont été utilisées et les corrélations quadruples sont évaluées à l'aide de l'hypothèse de MILLIONSHCHIKOV. B.A. KOLOVANDINE (1968, 1970) /105/ /106/ étudie dans le même esprit le transfert d'une quantité scalaire attachée au champ turbulent.

CHAPITRE II

INTRODUCTION D'UN NOUVEAU MODELE DESCRIPTIF DU MOUVEMENT ET DU TRANSFERT TURBULENTS

Le modèle présenté a été développé à partir des travaux /75/ /76/ /82/ /95/ /96/ /97/ de F.H. HARLOW, C.W. HIRT et leurs collaborateurs du "Los Alamos Scientific Laboratory". Mais de profondes retouches /107/ ont été apportées au schéma initial, dans le but d'améliorer la description de l'écoulement en conduite étudié en premier lieu, d'étendre ensuite son domaine d'application à des géométries variées et de traiter l'aspect thermique du problème. Deux échelles efficaces indépendantes ont ainsi été introduites, qui décrivent une turbulence dont le spectre peut varier non seulement en grandeur mais aussi en forme. L'idée de rattacher le transport de la quantité de mouvement d'une part et celui de la chaleur ou de la masse d'autre part à ces deux échelles par des lois distinctes a permis de différencier les deux mécanismes.

Sous sa forme la plus générale le modèle fait appel à un ensemble d'équations d'évolution de toutes les corrélations doubles de vitesse qui permettent une description suffisamment détaillée du champ turbulent pour les applications pratiques. Ce niveau de complexité n'a cependant pas été retenu pour une première approche. Des versions simplifiées et par conséquent imparfaites du modèle ont ainsi été introduites dont diverses exploitations numériques sont présentées.

II-1 EQUATIONS DE TRANSPORT DE LA TURBULENCE

II-1.1 Equations fondamentales du mouvement

Les équations de NAVIER-STOKES et de continuité déterminent le mouvement instantané du fluide isovolume.

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k v_{i,k} = - \pi_{,i} + \nu v_{i,kk} \quad v_{k,k} = 0 \quad (1)$$

Chaque grandeur instantanée g est considérée comme la somme d'une partie moyenne $\bar{g}$ et d'une partie fluctuante g' de moyenne nulle, en particulier $v_i = \bar{v}_i + v'_i$ et $\pi = \bar{\pi} + \pi'$. La distinction d'une partie moyenne et d'une partie fluctuante dans l'équation (1) conduit à deux équations d'évolution qui sont l'équation de REYNOLDS d'une part et l'équation de la vitesse fluctuante d'autre part.

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_k \bar{v}_{i,k} = - \bar{\pi}_{,i} + \nu \bar{v}_{i,kk} - R_{ik,k} \quad \bar{v}_{k,k} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t} + \bar{v}_k v'_{i,k} = - v'_k \bar{v}_{i,k} - v'_k v'_{i,k} - \pi'_{,i} + \nu v'_{i,kk} + R_{ik,k}$$

$$v'_{k,k} = 0 \quad (3)$$

Toutes les moyennes considérées sont des moyennes stochastiques définies sur un ensemble de réalisations de l'écoulement satisfaisant aux mêmes conditions aux limites et des conditions initiales légèrement variées. Cette définition écarte toute difficulté associée aux moyennes spatiales et temporelles en écoulement instationnaire.

II-1.2 Equations de transport des corrélations doubles

a) L'équation générale d'évolution des contraintes de REYNOLDS est obtenue directement à partir de (3) et de l'identité de définition

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial t} = \overline{v'_i \frac{\partial v'_j}{\partial t}} + \overline{v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial t}}$$

La formulation suivante

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{cccc}
 (a) & (b) & (c) & (d) \\
 \frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + \bar{v}_k R_{ij,k} & = - R_{ik} \bar{v}_{j,k} - R_{jk} \bar{v}_{i,k} & &
 \end{array} \\
 & \begin{array}{ccc}
 (e) & (f) & (g) \\
 - (v'_i v'_j v'_k)_{,k} & - (v'_i \pi')_{,j} & - (v'_j \pi')_{,i}
 \end{array} \\
 & \begin{array}{ccc}
 (h) & (i) & (j) \\
 + \pi' (v'_{i,j} + v'_{j,i}) & - 2 \nu v'_{i,k} v'_{j,k} + \nu R_{ij,kk} &
 \end{array}
 \end{aligned} \quad (4)$$

fait apparaître une somme de termes dont l'interprétation physique est directe. Au premier membre (4-a) et (4-b) forment la dérivée particulaire, au second membre (4-c) et (4-d) représentent la production de R_{ij} par cisaillement des couches fluides, (4-e) représente la diffusion turbulente contrôlée par la corrélation triple T_{ijk} , (4-f) et (4-g) la diffusion due aux fluctuations de pression, tandis que (4-h) est interprétée comme un terme de redistribution d'énergie, (4-i) comme la dissipation par viscosité moléculaire et (4-j) la diffusion moléculaire de R_{ij} .

La contraction tensorielle de l'équation (4) fournit l'équation classique de l'énergie cinétique de turbulence.

b) Afin de réaliser la fermeture des équations au niveau des corrélations doubles il convient d'approcher les nouvelles corrélations inconnues apparues dans (4) à l'aide des grandeurs fondamentales choisies pour décrire le champ de turbulence.

L'approche de ces termes est basée sur deux types d'hypothèses générales relatives au processus de diffusion d'une part et de dissipation d'autre part.

Les expressions de la forme $\overline{v'_i g'}$ sont interprétées comme la diffusion de la grandeur g du fait de la turbulence. Nous supposons vérifiée la loi générale $\overline{v'_i g'} = - \epsilon_t \bar{g}_{,i}$ (5) qui introduit un coefficient de diffusion par turbulence $\epsilon_t = A_g L \sqrt{q}$ (6), formule du type KOLMOGOROFF-PRANDTL dans laquelle A_g est une constante

universelle, la longueur L l'échelle de diffusion par turbulence qui sera définie ultérieurement et q l'énergie cinétique de turbulence.

Une justification intuitive de cette écriture peut être donnée en supposant que la fluctuation g' est essentiellement due au transport de la valeur moyenne $\bar{g}(\vec{x} - \vec{\xi})$ de la position $\vec{x} - \vec{\xi}$ à la position $\vec{x}$:

$$g' = \bar{g}(\vec{x} - \vec{\xi}) - \bar{g}(\vec{x})$$

un développement limité à son premier terme conduit à :

$$g' = \xi_j \bar{g}_{,j}$$

et par suite

$$\overline{v_i' g'} = \xi_j \overline{v_i' g_{,j}}$$

Nous n'avons pas utilisé l'hypothèse élaborée $\xi_j \overline{v_i'} = -A L R_{ij} / \sqrt{q}$ qui conduirait à un coefficient de diffusion tensoriel suggéré par certains résultats d'expériences /108/ mais l'hypothèse simple $\overline{\xi_j v_i'} = -A L \sqrt{q} \delta_{ij}$ a été retenue.

L'application de cette hypothèse à la corrélation triple $T_{ijk} = \overline{v_i' v_j' v_k'}$ qui représente la diffusion turbulente d'un tenseur du second ordre doit également tenir compte de la nécessaire symétrie par rapport à chacun des indices.

$$T_{ijk} = -A_1 L \sqrt{q} (R_{ij,k} + R_{jk,i} + R_{ki,j}) \quad (7)$$

La forme contractée

$$T_{ijj} = -2 A_1 L \sqrt{q} (R_{ij,j} + q_{,i})$$

redonne l'hypothèse initiale lorsque R_{ij} est isotrope, c'est à dire $R_{ij} = \frac{2}{3} q \delta_{ij}$. Dans ce cas :

$$\overline{v'_i q'} = -\frac{5}{3} A_1 L \sqrt{q} q_{,i}$$

L'expression (I-64) qui fait intervenir des coefficients de diffusion tensoriels peut conduire à une meilleure approximation des corrélations triples. En particulier, il est retrouvé que la corrélation T_{111} dans une conduite n'est pas nulle /129/ contrairement à ce que laisse prévoir la formulation (7). Toutefois, dans les écoulements turbulents cisailés avec direction principale du mouvement dans le sens Ox_1 , seule la dérivée $T_{ijk,k}$ intervient dans l'équation (4) avec une prépondérance du terme $T_{ij2,2}$, et la formulation (7) d'écriture beaucoup plus simple en donne une approximation suffisante.

Sur les corrélations dissipatives un deuxième type d'hypothèse générale est formulé

$$2 \nu \overline{f'_{,j} g'_{,j}} = \nu \frac{\overline{f' g'}}{\Delta^2} \quad (8)$$

qui fait intervenir une nouvelle échelle de turbulence, la micro-échelle Δ .

$$\text{ainsi} \quad E_{ij} = 2 \nu \overline{v'_{i,k} v'_{j,k}} = \frac{\nu R_{ij}}{\Delta^2} \quad (9)$$

$$E = \nu \overline{v'_{i,j} v'_{i,j}} = \frac{\nu q}{\Delta^2} \quad (10)$$

Dans le cas particulier d'une turbulence homogène et isotrope, dans laquelle $E = 10 \nu \frac{q}{\lambda_L^2}$, on pourra identifier $\Delta \sqrt{10}$ à la microéchelle de G.I. TAYLOR.

Les hypothèses de fermeture relatives à l'équation (4) portent sur les termes (4-e) à (4-i), les autres termes ayant une expression stricte.

$$(4-e) = A_1 \{ L \sqrt{q} (R_{ij,k} + R_{jk,i} + R_{ki,j}) \}_{,k} \quad (11)$$

$$(4-f) = B_1 (L \sqrt{q} q_{,i})_{,j} \quad (12)$$

$$(4-g) = B_1 (L \sqrt{q} q_{,j})_{,i} \quad (13)$$

Cette hypothèse fait exception à la règle générale (5), en effet, si la corrélation $\pi' v'_1$ est interprétée comme le flux de travail effectué par les fluctuations de pression on peut raisonnablement supposer une proportionnalité au gradient $q_{,i}$ déjà préconisée par C.W. HIRT /96/

$$(4-h) = P_{ij}^{(1)} + P_{ij}^{(2)} + P_{ij}^{(3)} \quad (14)$$

$$(4-i) = - \frac{v R_{ij}}{\delta^2} \quad (15)$$

Les corrélations de pression (4-h) jouent un rôle important dans la redistribution des énergies suivant les différentes directions, leur formulation est plus compliquée. Nous supposons que (4-h) s'exprime comme la somme de trois termes dont la contraction est nulle, chacun de ces termes ayant une action spécifique. La partie $P_{ij}^{(1)}$ représente la conversion de l'énergie cinétique de turbulence q en pression lorsqu'un micronuage turbulent s'arrête sur une distance L puis accélère dans d'autres directions.

Si l'énergie se trouve créée de façon préférentielle dans une direction (par cisaillement), alors la corrélation de pression va tendre à rétablir l'isotropie par couplage avec les autres directions. C'est la justification intuitive de l'hypothèse

$$P_{ij}^{(1)} = - \frac{\zeta \sqrt{q}}{2 L} f (R_{ij} - \frac{2}{3} q \delta_{ij}) \quad (16)$$

$$\zeta \text{ est une constante numérique et } f = \frac{A_p L \sqrt{q}}{v + A_p L \sqrt{q}}$$

permet d'effacer le rôle de $P_{ij}^{(1)}$ dans les régions où le nombre de REYNOLDS de turbulence est faible (près des parois par exemple). Un terme de ce type est également utilisé par J.C. ROTTA, C.W. HIRT et F.H. HARLOW. La partie $P_{ij}^{(2)}$ agit dans les régions de forte inhomogénéité et permet en particulier de décrire l'apport d'énergie à la

composante longitudinale près des parois au détriment des composantes transversales. Ce terme crée l'anisotropie, contrairement à $P_{ij}^{(1)}$, et a été ainsi formulé :

$$P_{ij}^{(2)} = -\eta \frac{v}{q^2} q_{,k} (R_{ik} q_{,j} + R_{jk} q_{,i} - \frac{2}{3} R_{kl} q_{,l} \delta_{ij}) \quad (17)$$

η constante numérique

La partie $P_{ij}^{(3)}$ regroupe des termes correctifs proportionnels aux gradients de vitesse moyenne, analogues à ceux introduits par P.Y. CHOU, J.C. ROTTA ainsi que D. NAOT /109/

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(3)} = & -\gamma q (\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{j,i}) \\ & + \alpha f (R_{il} \bar{v}_{j,l} + R_{jl} \bar{v}_{i,l} - \frac{2}{3} R_{kl} \bar{v}_{k,l} \delta_{ij}) \\ & + \chi f (R_{il} \bar{v}_{l,j} + R_{jl} \bar{v}_{l,i} - \frac{2}{3} R_{kl} \bar{v}_{k,l} \delta_{ij}) \end{aligned} \quad (18)$$

Compte tenu des hypothèses (11) à (18) l'équation (4) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + \bar{v}_k R_{ij,k} = & -R_{ik} \bar{v}_{j,k} - R_{jk} \bar{v}_{i,k} \\ & + A_1 \{L \sqrt{q} (R_{ij,k} + R_{jk,i} + R_{ki,j})\}_{,k} \\ & + B_1 \{(L \sqrt{q} q_{,i})_{,j} + (L \sqrt{q} q_{,j})_{,i}\} \\ & + P_{ij}^{(1)} + P_{ij}^{(2)} + P_{ij}^{(3)} - v \frac{R_{ij}}{\delta^2} + v R_{ij,kk} \end{aligned} \quad (19)$$

L'équation de transport de l'énergie turbulente est obtenue par contraction de (19)

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \bar{v}_i q_{,i} = & -R_{ij} \bar{v}_{i,j} + A_1 \{L \sqrt{q} (q_{,i} + R_{ik,k})\}_{,i} \\ & + B_1 (L \sqrt{q} q_{,i})_{,i} - \frac{vq}{\delta^2} + v q_{,ii} \end{aligned} \quad (20)$$

II-1.3 Evolution de la microéchelle de turbulence

Une équation de transport pour le taux de dissipation d'énergie turbulente par viscosité moléculaire E , introduite par F.H. HARLOW et P.I. NAKAYAMA /75/, fournit un intermédiaire pour atteindre la microéchelle de turbulence elle-même. Cette équation s'obtient aisément par dérivation de l'équation de vitesse fluctuante (3) par rapport à x_j , multiplication des deux membres par $v'_{i,j}$ suivie d'une opération de moyenne.

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \bar{v}_k E_{,k} = - 2 \nu \overline{v'_k v'_{i,j} v'_{i,kj}} \quad \text{(c)} \\
 & - 2 \nu \overline{v'_{i,j} v'_{k,j} v'_{i,k}} \bar{v}_{i,k} - 2 \nu \overline{v'_{i,j} v'_{i,k} v'_{k,j}} \bar{v}_{k,j} \quad \text{(d)} \quad \text{(e)} \\
 & - 2 \nu \overline{v'_{i,j} v'_{k,j} v'_{i,k}} \quad \text{(f)} \quad \overline{v'_k v'_{i,j} v'_{i,j}}_{,k} \quad \text{(g)} \\
 & - 2 \nu \overline{v'_{i,j} \pi'_{ij}} \quad \text{(h)} \quad + 2 \nu^2 \overline{v'_{i,j} v'_{i,jkk}} \quad \text{(i)} \quad (21)
 \end{aligned}$$

De nouvelles hypothèses sur l'expression des corrélations inconnues du second membre sont introduites.

(21-c) est supposé négligeable en première approximation

$$(21-d) = - \frac{\nu}{\Delta^2} R_{ij} \bar{v}_{i,j} \quad (22)$$

$$(21-e) = - \omega \frac{\nu}{\Delta^2} R_{ij} \bar{v}_{i,j} \quad (23)$$

$$(21-f) + (21-g) = - \frac{\nu}{\Delta^2} (v'_k q')_{,k} + A_s \nu q \{L \sqrt{q} (\frac{1}{\Delta^2})_{,k}\}_{,k} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 (21-h) &= - 2 \nu \overline{(v'_{i,j} \pi'_{ij})_{,i}} \\
 &= A_{sq} \left(\frac{\nu}{\Delta^2} L \sqrt{q} q_{,i} \right)_{,i} \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$(21-i) = \frac{v}{\delta^2} q_{,jj} + a v q \left(\frac{1}{\delta^2} \right)_{,jj} - (1 + \Delta) \frac{v^2}{\delta^4} q \quad (26)$$

Les deux premiers termes dans (21-i) représentent la diffusion moléculaire et le troisième terme la dissipation visqueuse de E.

L'évolution de l'échelle δ est obtenue à partir de la relation de définition $E = \frac{vq}{\delta^2}$ qui fournit sous forme différentielle

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\delta^2} \right) = \frac{1}{vq} \frac{dE}{dt} - \frac{1}{\delta^2} \frac{dq}{dt}$$

Compte tenu des hypothèses précédentes (22) à (26) et de la forme contractée (20) de l'équation des R_{ij} , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\delta^2} \right) + \bar{v}_k \left(\frac{1}{\delta^2} \right)_{,k} = & - \omega \frac{R_{ij}}{\delta^2} \frac{1}{q} \bar{v}_{i,j} + A_s \{ L \sqrt{q} \left(\frac{1}{\delta^2} \right)_{,k} \}_{,k} \\ & + A_{sq} \frac{1}{q} \left(\frac{L \sqrt{q}}{\delta^2} q_{,k} \right)_{,k} + a v \left(\frac{1}{\delta^2} \right)_{,kk} - \Delta \frac{v}{\delta^4} \end{aligned} \quad (27)$$

Chaque terme de l'équation (27) a une interprétation physique directe, le premier membre est la dérivée particulaire de $\left(\frac{1}{\delta^2} \right)$, au second membre on distingue respectivement un terme de diminution de l'échelle par cisaillement turbulent qui traduit l'effilochement des structures tourbillonnaires, deux termes de diffusion turbulente, un terme de diffusion moléculaire et un terme source qui correspond à l'augmentation moyenne de la taille des tourbillons par viscosité.

II-1.4 Evolution de l'échelle intégrale

Afin de clore le système différentiel, une dernière équation pour l'échelle intégrale L est nécessaire.

Il est proposé pour l'échelle intégrale une expression analogue à celle déjà utilisée par J.C. ROTTA /90/

$$L \sim \frac{1}{q} \int_0^{\infty} \frac{E(k,t)}{k} dk \quad (28)$$

où $E(k,t)$ représente le spectre moyen d'énergie et k le nombre d'onde.

Dans une turbulence homogène et isotrope L s'identifie à l'échelle intégrale de corrélation longitudinale, en effet dans ce cas particulier il existe la relation /9/

$$\int_0^{\infty} R_{\ell\ell}(r,t) dr = \frac{3\pi}{4q} \int_0^{\infty} E(k,t) \frac{dk}{k} \quad (29)$$

La construction de l'équation de L sera donc effectuée à partir de l'équation d'évolution du spectre moyen $E(k,t)$. Considérons pour cela l'équation de la dynamique des fluctuations de vitesse en deux points distincts /5 p. 257/

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} Q_{i/j} + Q_{n/j} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_n} \right)_A + Q_{i/n} \left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_n} \right)_B \\ & + \frac{1}{2} \{ (\bar{v}_n)_A + (\bar{v}_n)_B \} \left(\frac{\partial Q_{i/j}}{\partial x_n} \right)_{AB} + \{ (\bar{v}_n)_B - (\bar{v}_n)_A \} \frac{\partial Q_{i/j}}{\partial \xi_n} \\ & = - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{AB} (S_{i/nj} + S_{in/j}) - \frac{\partial}{\partial \xi_n} (S_{i/nj} - S_{in/j}) \\ & - \frac{1}{2\rho} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{AB} K_{P/j} + \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{AB} K_{i/P} \right\} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_i} K_{P/j} \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial \xi_j} K_{i/P} \right\} + \frac{1}{2} v \left(\frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \right)_{AB} Q_{i/j} + 2 v \frac{\partial^2}{\partial \xi_n \partial \xi_n} Q_{i/j} \quad (30) \end{aligned}$$

Définissons la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f telle que :

$$f(\vec{\xi}, \vec{x}, t) = \int_{R^3} \hat{f}(\vec{k}, \vec{x}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{\xi}} d\vec{k}$$

et introduisons les notations

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{i/j} &= \hat{Q}_{i/j} & F_{in/j} &= \hat{S}_{in/j} & \Pi_{P/j} &= \frac{1}{\rho} \hat{K}_{P/j} \\
 F_{i/j} &= \hat{S}_{i/j} & \text{avec } S_{i/j} &= \frac{\partial}{\partial \xi_n} (S_{in/j} - S_{i/nj}) \\
 \Pi_{i/j} &= \hat{K}_{i/j} & \text{avec } K_{i/j} &= \frac{\partial}{\partial \xi_j} K_{i/P} - \frac{\partial}{\partial \xi_i} K_{P/j} \\
 W &= \hat{W} & \text{avec } W &= Q_{n/j} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_n} \right)_A - \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_n} \right)_{AB} \right\} \\
 & & & + Q_{i/n} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_n} \right)_B - \left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_n} \right)_{AB} \right\} \\
 & & & + \left\{ (\bar{v}_n)_B - (\bar{v}_n)_A \right\} \frac{\partial}{\partial \xi_n} Q_{i/j}
 \end{aligned}$$

La transformée de Fourier de (30) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_{i/j} + \epsilon_{n/j} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_n} \right)_{AB} + \epsilon_{i/n} \left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_n} \right)_{AB} \\
 & + (\bar{v}_n)_{AB} \frac{\partial \epsilon_{i/j}}{\partial x_n} = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_n} (F_{i/nj} + F_{in/j}) \\
 & - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Pi_{P/j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{i/P} \right) + F_{i/j} - \Pi_{i/j} \\
 & + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \epsilon_{i/j} - W - 2 v k^2 \epsilon_{i/j}
 \end{aligned} \tag{31}$$

L'intégration sur une sphère de rayon k et d'aire $A(k)$ permet de définir des spectres moyens indépendants de la direction du vecteur d'onde.

$$\tilde{\epsilon}_{ij}(k, \vec{x}, t) = \frac{1}{4 \pi k^2} \int_A \epsilon_{i/j}(\vec{k}, \vec{x}, t) dA(k) \tag{32}$$

Introduisons les notations

$$E_{ij} = 4 \pi k^2 \tilde{\epsilon}_{i/j} \quad E = \frac{1}{2} E_{ii}$$

$$F_n = 2 \pi k^2 (\tilde{F}_{i/ni} + \tilde{\pi}_{P/n}) \quad F = 2 \pi k^2 (\tilde{F}_{i/i} - \tilde{\pi}_{i/i})$$

$$G = -2 v \pi k^2 E + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} E - 2 \pi k^2 \tilde{w}$$

L'équation d'évolution du spectre moyen E s'écrit alors simplement :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \bar{v}_n \frac{\partial E}{\partial x_n} = - E_{ij} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial F_n}{\partial x_n} + F + G \quad (33)$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \frac{E dk}{k} &+ \bar{v}_n \frac{\partial}{\partial x_n} \int_0^\infty \frac{E dk}{k} = - \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \int_0^\infty \frac{E_{ij} dk}{k} \\ &- \frac{\partial}{\partial x_n} \int_0^\infty \frac{F_n dk}{k} + \int_0^\infty \frac{F dk}{k} + \int_0^\infty \frac{G dk}{k} \end{aligned} \quad (34)$$

L'interprétation physique de chacun des termes suggère les approximations suivantes

$$(34-c) = - L R_{ij} \bar{v}_{i,j} \quad (35)$$

$$(34-d) = A_L q (L \sqrt{q} L_{,i})_{,i} - L (q' v'_i)_{,i} \quad (36)$$

$$(34-e) = \beta q^{3/2} - \delta \frac{v q L}{\delta^2} \quad (37)$$

$$(34-f) = - \gamma \frac{v q L}{\delta^2} + b q v L_{,ii} + v L q_{,ii} \quad (38)$$

La fonction F représente l'interaction tourbillonnaire qui se traduit par un apport d'énergie à la microturbulence prélevée sur les gros tourbillons. L'hypothèse (37) schématise cette double action. L'expression (34-f) regroupe les termes de dissipation visqueuse et de diffusion moléculaire.

Compte tenu de l'équation (34), des hypothèses (35) à (38) et de l'équation d'énergie (20) il vient :

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \bar{v}_i L_{,i} = \beta \sqrt{q} - (\delta + \gamma - 1) \frac{vL}{\delta^2} + A_L (L \sqrt{q} L_{,i})_{,i} + b v L_{,ii}$$

L étant définie à une constante multiplicative près, nous fixerons cette constante par la condition arbitraire

$$\beta = \delta + \gamma - 1$$

ce qui détermine l'équation d'échelle

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \bar{v}_i L_{,i} = \beta \sqrt{q} + A_L (L \sqrt{q} L_{,i})_{,i} - \beta \frac{vL}{\delta^2} + b v L_{,ii} \quad (39)$$

Les termes du second membre de (39) peuvent être interprétés respectivement comme la source du mélange turbulent, la diffusion turbulente d'échelle, le ralentissement visqueux à la migration des structures tourbillonnaires et la diffusion moléculaire.

II-2 TRANSFERT DE CHALEUR OU DE MASSE PAR TURBULENCE

L'équation fondamentale est l'équation instantanée du bilan d'énergie

$$\frac{\partial H}{\partial t} + v_j H_{,j} = - \frac{j_{i,i}}{\rho} + v v_{i,j} (v_{i,j} + v_{j,i}) + \frac{d\pi}{dt}$$

$$\text{avec } H = C_p T \text{ et } j_i = - \lambda T_{,i}$$

(40)

Un traitement statistique analogue à celui effectué sur l'équation du mouvement conduit à l'équation de transport de l'enthalpie moyenne $\bar{H}$.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (a) \quad + \bar{v}_j \bar{H}_{,j} \quad (b) \quad = \frac{\lambda}{\rho} \bar{T}_{,jj} \quad (c) \quad + \nu \bar{v}_{i,j} (\bar{v}_{j,i} + \bar{v}_{i,j}) \quad (d) \\
 & + \nu \bar{v}_{i,j} (\bar{v}'_{i,j} + \bar{v}'_{j,i}) \quad (e) \quad - (H' \bar{v}'_{j,j})_j \quad (f) \quad + \frac{d\bar{\pi}}{dt} \quad (g) \quad + (\pi' \bar{v}'_{j,j})_j \quad (h) \quad (41)
 \end{aligned}$$

Dans les applications envisagées, on négligera l'échauffement aérodynamique (41-d), la production de chaleur par turbulence (41-e) ainsi que les termes de pression (41-g) et (41-h), car le problème thermique est largement conditionné par les flux de diffusion moléculaire et turbulent. Une nouvelle hypothèse est nécessaire pour approcher le terme (41-f) qui représente la diffusion turbulente de la chaleur.

On posera

$$\bar{v}'_j T' = - D_t \bar{T}_{,j} \quad (42)$$

L'expression proposée pour la diffusivité thermique ou massique fait intervenir l'échelle δ

$$D_t = A_t \frac{\delta^2 q}{\nu} \quad (43)$$

Selon ce schéma, le mécanisme de transfert de chaleur ou de masse est essentiellement distinct de celui de la quantité de mouvement et il est ainsi possible de donner une expression au nombre de PRANDTL turbulent

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{D_t} = - \frac{\nu R_{12}}{A_t \delta^2 q (\bar{v}_{1,2} + \bar{v}_{2,1})} \quad (44)$$

dans les écoulements cisailés.

Compte tenu des hypothèses simplificatrices précédentes et de l'expression (42) du transport turbulent, l'équation de la chaleur

sera retenue sous la forme :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{v}_j \bar{T}_{,j} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \bar{T}_{,jj} + A_t \left(\frac{\delta^2 q}{u} \bar{T}_{,j} \right)_{,j} \quad (45)$$

Sous sa forme complète, le modèle de turbulence est constitué par l'ensemble des équations (2) du mouvement et de conservation de la masse, (19) de transport des corrélations doubles, (27) et (39) d'évolution des échelles de turbulence et enfin l'équation de la chaleur (45). L'application à chaque cas particulier d'écoulement se fera en y joignant les conditions initiales et les conditions aux limites convenables.

II-3 APPLICATION A DES CONFIGURATIONS TYPES

Les études d'écoulements turbulents types dans des géométries simples, telles que la décroissance de la turbulence derrière une grille, les écoulements près des parois, permettent d'obtenir des relations algébriques entre constantes et d'approcher la valeur de certaines d'entre elles les plus importantes.

II-3.1 Décroissance de la turbulence derrière une grille

On considère la turbulence dans un fluide en mouvement permanent en aval d'une grille. U étant la vitesse moyenne uniforme du fluide et x_1 l'abscisse comptée dans le sens de l'écoulement, le système d'équations de transport s'écrit dans ce cas

$$U R_{11,1} = - \frac{\zeta}{2} \frac{\sqrt{q}}{L} f \left(R_{11} - \frac{2}{3} q \right) - \frac{v}{\delta^2} R_{11} \quad (46)$$

$$U R_{22,1} = - \frac{\zeta}{2} \frac{\sqrt{q}}{L} f \left(R_{22} - \frac{2}{3} q \right) - \frac{v}{\delta^2} R_{22} \quad (47)$$

$$U R_{33,1} = - \frac{\zeta}{2} \frac{\sqrt{q}}{L} f \left(R_{33} - \frac{2}{3} q \right) - \frac{v}{\delta^2} R_{33} \quad (48)$$

$$U R_{12,1} = - \frac{\zeta}{2} \frac{\sqrt{q}}{L} f R_{12} - \frac{v}{\delta^2} R_{12} \quad (49)$$

$$U \left(\frac{1}{\delta^2} \right)_{,1} = - \Delta \frac{v}{\delta^4} \quad (50)$$

$$U L_{,1} = \beta \sqrt{q} - \beta \frac{vL}{\delta^2} \quad (51)$$

La contraction des trois premières équations fournit l'équation de décroissance de l'énergie.

$$U q_{,1} = - \frac{vq}{\delta^2} \quad (52)$$

(50) admet la solution

$$\delta^2 = \alpha x_1 + \delta_0^2 \quad (53)$$

où $\alpha = \frac{\Delta v}{U}$ et δ_0 est la valeur initiale de δ , dès lors (52) a pour solution

$$q = q_0 \left(1 + \frac{\alpha x_1}{\delta_0^2} \right)^{-\frac{1}{\Delta}} \quad (54)$$

q et δ étant des fonctions connues de x_1 , l'équation (51) est linéaire en L . La solution générale de l'équation homogène associée est de la forme

$$L = c^{te} \left(1 + \frac{\alpha x_1}{\delta_0^2} \right)^{-\beta/\Delta}$$

expression qui s'annule pour $x_1 \rightarrow \infty$. Une solution particulière de l'équation complète recherchée sous la forme $L = (ax_1 + b)^n$ conduit à:

$$L = L_1 \left(1 + \frac{\alpha x_1}{\delta_0^2} \right)^{1 - \frac{1}{2\Delta}} \quad (55)$$

où

$$L_1 = \frac{\beta \sqrt{q_0} \delta_0^2}{v (\beta + \Delta - 1/2)}$$

L'évolution de R_{11} , R_{22} , R_{33} et R_{12} est donnée par la résolution de leur équation de transport, la valeur initiale à introduire pour chacune d'entre elles dépendant des propriétés de la grille

elle-même. Le résultat pour R_{11} par exemple peut être formulé de manière à faire apparaître le taux de décroissance des anisotropies.

$$\frac{R_{11} - 2/3 q}{q} = \frac{R_{110} - 2/3 q_0}{q_0} \left(1 + \frac{\alpha x_1}{\delta_0^2}\right) - \frac{\zeta f (\Delta + \beta - 1/2)}{2 \beta \Delta} \quad (56)$$

(en supposant que f varie lentement avec x_1)

Les expressions pour R_{22} et R_{33} sont analogues et celle pour R_{12} s'écrit :

$$\frac{R_{12}}{q} = \frac{R_{120}}{q_0} \left(1 + \frac{\alpha x_1}{\delta_0^2}\right) - \frac{\zeta f (\Delta + \beta - 1/2)}{2 \beta \Delta} \quad (57)$$

Les résultats expérimentaux classiques de G.K. BATCHELOR et A.A. TOWNSEND /5/ ont permis de distinguer dans la décroissance de la turbulence une phase finale et une phase initiale. Dans la phase initiale $q \sim x_1^{-1}$, dans la phase finale $q \sim x_1^{-2,5}$ et dans la phase intermédiaire $q \sim x_1^{-n}$ avec $1 < n < 2,5$. A.L. KISTLER et T. VREBALOVICH (1966) /110/ retrouvent également la loi $q \sim x_1^{-1}$ dans la phase initiale de décroissance. W.D. BAINES et E.G. PETERSON (1951) /111/ utilisant des grillages à section carrée et des plaques perforées ont été conduits à la loi $q \sim x_1^{-10/7}$. Toujours dans la phase initiale, les expériences de G. COMTE-BELLOT et S. CORRSIN (1966) /112/ effectuées sur trois types différents de grilles génératrices fournissent plutôt $q \sim x_1^{1,25}$.

Les termes de diffusion turbulente ont été négligés en première approximation dans les équations (46) à (48), leur introduction se ferait en ajoutant au second membre de ces équations, respectivement:

$$3 A_1 (L \sqrt{q} R_{11,1})_{,1} + 2 B_1 (L \sqrt{q} q_{,1})_{,1} \quad \text{pour} \quad (46)$$

$$A_1 (L \sqrt{q} R_{22,1})_{,1} \quad \text{pour} \quad (47)$$

$$A_1 (L \sqrt{q} R_{33,1})_{,1} \quad \text{pour} \quad (48)$$

Ces termes sont tous positifs, et la valeur plus élevée de la diffusion de R_{11} favorise une légère anisotropie telle que $\frac{R_{11}}{R_{22}} > 1$,

expérimentalement constatée par G. COMTE-BELLOT et S. CORRSIN /112/.

Les auteurs utilisent une contraction de la veine pour réaliser l'isotropie. Dans ce cas, s'ajoute le terme de production négative

$- 2 R_{11} v_{1,1}$ dans (46) et le terme de production positive $- 2 R_{22} v_{2,2}$ dans (47) qui rétablissent l'égalité de R_{11} et R_{22} .

L'équation (54) permet d'obtenir les valeurs limites du paramètre Δ qui sont 1 dans une turbulence de forte intensité (loi $q \sim x_1^{-1}$) et 0,4 aux faibles nombres de REYNOLDS de turbulence (loi $q \sim x_1^{-2,5}$).

Δ apparaît donc comme une fonction universelle de $L \sqrt{q}/\nu$ dont on a simplement approché les variations par une fonction en escalier :

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 & A_0 L \sqrt{q} &> 0,92 \\ \Delta &= 0,4 & A_0 L \sqrt{q} &< 0,92 \end{aligned} \quad (58)$$

En réalité, la variation de Δ ne peut être aussi brutale. Cependant, en l'absence d'une formulation théorique de Δ , l'expression (58) semble conserver des avantages numériques.

III-3.2 La loi logarithmique de paroi

On se place près d'une paroi plane et lisse hors de la sous-couche visqueuse dans la région à cisaillement constant $\tau = \tau_0$. Posons $R_{12} = -\tau/\rho$ et $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$

Le nombre de REYNOLDS de turbulence est supposé assez élevé pour que la diffusion moléculaire soit négligeable.

Le système d'équations s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & -R_{22} \bar{v}_{1,2} + 2 A_1 (L \sqrt{q} R_{12,2})_{,2} - \frac{\zeta}{2} \frac{\sqrt{q}}{L} R_{12} - \gamma q \bar{v}_{1,2} \\
 & + (\alpha R_{22} + \chi R_{11}) \bar{v}_{1,2} - \frac{v}{\delta^2} R_{12} = 0 \\
 & - 2 R_{12} \bar{v}_{1,2} + A_1 (L \sqrt{q} R_{11,2})_{,2} - \frac{\zeta}{2} \frac{\sqrt{q}}{L} (R_{11} - \frac{2}{3} q) \\
 & + (\frac{4}{3} \alpha - \frac{2}{3} \chi) R_{12} \bar{v}_{1,2} - \frac{v}{\delta^2} R_{11} = 0 \\
 & 3 A_1 (L \sqrt{q} R_{22,2})_{,2} + 2 B_1 (L \sqrt{q} q_{,2})_{,2} - \frac{\zeta}{2} \frac{\sqrt{q}}{L} (R_{22} - \frac{2}{3} q) \\
 & + (\frac{4}{3} \chi - \frac{2}{3} \alpha) R_{12} \bar{v}_{1,2} - \frac{v}{\delta^2} R_{22} = 0 \\
 & A_1 (L \sqrt{q} R_{33,2})_{,2} - \frac{\zeta}{2} \frac{\sqrt{q}}{L} (R_{33} - \frac{2}{3} q) - (\frac{2}{3} \alpha + \frac{2}{3} \chi) R_{12} \bar{v}_{1,2} \\
 & - \frac{v}{\delta^2} R_{33} = 0 \\
 & - \omega \frac{R_{12}}{\delta^2 q} \bar{v}_{1,2} + A_s (L \sqrt{q} (\frac{1}{\delta^2}))_{,2} - \frac{v}{\delta^4} = 0 \\
 & \beta \sqrt{q} + A_L (L \sqrt{q} L_{,2})_{,2} - \beta \frac{vL}{\delta^2} = 0
 \end{aligned} \tag{59}$$

Le système (59) admet une solution de la forme

$$\begin{aligned}
 R_{ij} &= R_{ij0} x_2^n & q &= q_0 x_2^n & \delta^2 &= \delta_0^2 x_2^m \\
 L &= L_0 x_2^p & \bar{v}_{1,2} &= c x_2^r
 \end{aligned}$$

avec $n = 0$, $m = 1$, $p = 1$ et $r = -1$

$$\text{Il en résulte que } \bar{v}_1 = c \log x_2 + C^{\text{te}} \tag{60}$$

et le système (59) s'écrit :

$$-R_{220} c - \gamma q_0 c + \alpha R_{220} c + \chi R_{110} c - (1 + \frac{\zeta}{2} P) \frac{v}{\delta_0^2} R_{120} = 0 \tag{61}$$

$$\left(-\frac{4}{3}\alpha - \frac{2}{3}\chi - 2\right) R_{120} c - \frac{v}{\delta_0^2} \left(R_{110} + \frac{\zeta}{2} PR_{110} - \frac{\zeta}{3} P q_0\right) = 0 \quad (62)$$

$$- \left(-\frac{2}{3}\alpha - \frac{4}{3}\chi\right) R_{120} c - \frac{v}{\delta_0^2} \left(R_{220} + \frac{\zeta}{2} PR_{220} - \frac{\zeta}{3} P q_0\right) = 0 \quad (63)$$

$$- \left(-\frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3}\chi\right) R_{120} c - \frac{v}{\delta_0^2} \left(R_{330} + \frac{\zeta}{2} PR_{330} - \frac{\zeta}{3} P q_0\right) = 0 \quad (64)$$

$$- \omega \frac{v}{q_0 \delta_0^2} R_{120} c - \Delta \left(\frac{v}{\delta_0^2}\right)^2 + A_s L_0 \sqrt{q_0} \left(\frac{v}{\delta_0^2}\right) = 0 \quad (65)$$

$$\beta \sqrt{q_0} - \beta \frac{v L_0}{\delta_0^2} + A_L L_0^2 \sqrt{q_0} = 0 \quad (66)$$

où

$$P = \frac{\sqrt{q_0}}{L_0 (v/\delta_0^2)}$$

La somme membre à membre des équations (62) à (64) fournit

$$- R_{120} c - q_0 \left(\frac{v}{\delta_0^2}\right) = 0 \quad (67)$$

Il résulte alors des équations (65) et (66)

$$\frac{L_0 \sqrt{q_0}}{(v/\delta_0^2)} = \frac{\Delta - \omega}{A_s}$$

et

$$\frac{\sqrt{q_0}}{L_0 (v/\delta_0^2)} = 1 - \frac{A_L (\Delta - \omega)}{A_s \beta}$$

c'est-à-dire

$$\frac{q_0}{(v/\delta_0^2)^2} = \frac{(\Delta - \omega) P}{A_s} \quad L_0^2 = \frac{\Delta - \omega}{P A_s} \quad (68)$$

avec

$$P = \frac{A_s \beta - A_L (\Delta - \omega)}{A_s \beta}$$

Compte tenu de (67) les équations (62) à (64) donnent

$$\frac{R_{11}}{q} = \frac{2 + \frac{\zeta}{3} P - (\frac{4}{3} \alpha - \frac{2}{3} \chi)}{1 + \frac{\zeta}{2} P} \quad (69)$$

$$\frac{R_{22}}{q} = \frac{\zeta/3 P + (\frac{2}{3} \alpha - \frac{4}{3} \chi)}{1 + \frac{\zeta}{2} P} \quad (70)$$

$$\frac{R_{33}}{q} = \frac{\zeta/3 P + (\frac{2}{3} \alpha + \frac{2}{3} \chi)}{1 + \frac{\zeta}{2} P} \quad (71)$$

et (61) fournit

$$\left(\frac{R_{12}}{q}\right)^2 = \frac{\frac{R_{22}}{q} + \gamma - \alpha \frac{R_{22}}{q} - \chi \frac{R_{11}}{q}}{1 + \frac{\zeta}{2} P} \quad (72)$$

Il est possible d'écrire R_{12} sous la forme $R_{12} = -A L_0 \sqrt{q_0} c$
A étant un coefficient numérique constant dans l'écoulement dont la
valeur est donnée par

$$A = P \left(\frac{R_{12}}{q} \right)^2 \quad (73)$$

Plus précisément :

$$A = \frac{(1-\alpha) \left\{ \frac{\zeta}{3} + \frac{1}{P} \left(\frac{2}{3} \alpha - \frac{4}{3} \chi \right) \right\} - \chi \left\{ \frac{2}{P} + \frac{\zeta}{3} - \frac{1}{P} \left(\frac{4}{3} \alpha - \frac{2}{3} \chi \right) \right\} + \gamma \left\{ \frac{1+\zeta}{P+2} \right\}}{\left(\frac{1}{P} + \frac{\zeta}{2} \right)^2}$$

D'autre part c est obtenu par (67) que l'on peut aussi
écrire :

$$\frac{c}{\sqrt{\tau/\rho}} = \left(\frac{q}{R_{12}} \right)^{3/2} \left(\frac{v/s_0^2}{\sqrt{q_0}} \right)$$

et utilisant (67) et (73)

$$\frac{c}{v_*} = \left(\frac{P}{A} \right)^{3/4} \sqrt{\frac{A_s}{(\Delta - \omega) P}}$$

La condition $\frac{c}{v_*} = \frac{1}{\kappa}$ dans laquelle κ est la constante de VON KARMAN, donne une relation entre constantes numériques du modèle.

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{A^{3/4}} \left(\frac{A_s}{\Delta - \omega} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{A_L (\Delta - \omega)^{1/4}}{A_s \beta} \right) \quad (74)$$

On tire aisément de l'équation (65) la relation

$$\frac{\Delta - \omega}{\kappa^2} = \frac{A_s}{A} \left(\frac{q}{v_*^2} \right) \text{ qui permet une première approximation de } \omega \text{ en fonction de}$$

$$\frac{A_s}{A} = \frac{A_s}{P} \left/ \left(\frac{R_{12}}{q} \right)^2 \right. \text{ et } \frac{q}{v_*^2}$$

Le transfert de chaleur par turbulence à flux constant est décrit par

$$A_t \frac{\delta^2 q}{v} \bar{T}_{1,2} = v_* T_* \quad (75)$$

relation à rapprocher de

$$- R_{12} = A L \sqrt{q} \bar{v}_{1,2} = v_*^2$$

qui conduit à la solution

$$\frac{\bar{T}}{T_*} = \frac{1}{\kappa_T} \text{Log } x_2 + C^{te} \quad (76)$$

$$\text{et } Pr_t = \frac{\kappa}{\kappa_T} = \frac{A v L \sqrt{q}}{A_t \delta^2 q} = \frac{A}{A_t P} \quad (77)$$

II-3.3 Sous-couche visqueuse

Considérons la région de fluide adjacente à la paroi dans laquelle la diffusion turbulente peut être négligée devant la diffusion moléculaire.

L'équation de l'énergie turbulente s'écrit :

$$v q_{,22} = v \frac{q}{\delta^2} \quad (78)$$

et celles de l'évolution des échelles

$$a \cup \left(\frac{1}{\Delta^2}\right)_{,22} = \Delta \cup \left(\frac{1}{\Delta^2}\right)^2 \quad (79)$$

$$b \cup L_{,22} = \beta \frac{v L}{\Delta^2} \quad (80)$$

posant $s = L = 0$ et $R_{ij} = 0$ sur la paroi (79) entraîne

$$\Delta^2 = \frac{\Delta x_2^2}{6 a}$$

$$\Delta \text{ étant égal à } 0,4 \text{ près de la paroi, } \Delta^2 = \frac{x_2^2}{15 a} \quad (81)$$

$$(78) \text{ admet une solution de la forme } q = q_0 x_2^n \quad (82)$$

où n est la solution positive de l'équation $n(n-1) = 15 a$

$$(80) \text{ admet une solution de la forme } L = L_0 x_2^m \quad (83)$$

$$\text{où } m \text{ est la solution positive de l'équation } m(m-1) = \frac{6 a \beta}{\Delta b}$$

Les valeurs $\Delta = 0,4$; $\beta = 0,4$ et $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ conduisent à $m = 2$

L'équation de R_{22} s'écrit

$$-\frac{4}{3} \eta \cup \frac{q_{,2} q_{,2}}{q^2} R_{22} + v R_{22,22} - v \frac{R_{22}}{\Delta^2} = 0 \quad (84)$$

$$\text{où } \frac{q_{,2} q_{,2}}{q^2} = \frac{n^2}{x_2^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\Delta^2} = \frac{15 a}{x_2^2}$$

$$R_{22} \text{ étant recherché sous la forme } R_{22} = r_{22} x_2^{p_2}, p_2 \text{ vérifie l'équation} \\ p_2(p_2 - 1) - 15 a - \frac{4}{3} \eta n^2 = 0 \quad (85)$$

Si η est suffisamment grand, plus précisément si $(2 + \frac{3}{2} n)$
 $(1 + \frac{3}{2} n) < 15 a + \frac{4}{3} \eta n^2$, le terme $2 B_1 (L \sqrt{q} q_{,2})_{,2}$ proportionnel
à $x_2^{3n/2}$, doit être retenu dans l'équation (81), dans ce cas $p_2 = \frac{3}{2}n + 2$.
Dans le cas contraire p_2 est la racine positive de l'équation (85).

Les équations de R_{11} et R_{33} ont la même forme

$$\nu R_{11,22} - \nu \frac{R_{11}}{\Delta^2} = 0 \quad (86)$$

$$\nu R_{33,22} - \nu \frac{R_{33}}{\Delta^2} = 0 \quad (87)$$

et admettent les solutions $R_{11} = r_{11} x_2^n$, $R_{33} = r_{33} x_2^n$. On vérifie a posteriori que les termes négligés dans les équations (86) et (87) sont effectivement d'un ordre d'infinitude plus élevé.

L'équation de R_{12} s'écrit :

$$- \eta \nu \frac{q_{,2} q_{,2}}{q^2} R_{12} + \nu R_{12,22} - \frac{\nu R_{12}}{\Delta^2} = 0 \quad (88)$$

R_{12} recherché sous la forme $R_{12} = r_{12} x_2^{p_{12}}$ fournit l'équation $p_{12} (p_{12} - 1) - 15 a - \eta n^2 = 0$ (89)

Si η est supérieur à une certaine valeur, donnée par $(n + 2)(n + 1) < 15 a + \eta n^2$, alors le terme $-\gamma q \bar{v}_{1,2}$ doit être également retenu dans l'équation (88), dans ce cas $p_{12} = n + 2$. Sinon p_{12} est la racine positive de l'équation (89).

Près de la paroi

$$\epsilon_t = A_0 L \sqrt{q} \sim x_2^{m + n/2}$$

$$\nu_t = \sim R_{12} / \bar{v}_{1,2} \sim x_2^{p_{12}}$$

$$D_t = A_t \frac{\Delta^2 q}{\nu} \sim x_2^{n + 2}$$

Dans la pratique, les expressions des diffusivités turbulentes près des parois ont souvent été obtenues à l'aide d'hypothèses dérivées de celle de L. PRANDTL (Chap. I). L'hypothèse de L.D. LANDAU et V.G. LEVICH /53/ permet de déduire $R_{12} \sim x_2^4$.

Outre les divers modèles physiques introduits afin d'expliquer le régime statistique à l'intérieur de la sous-couche visqueuse (A.L. KISTLER (1962) /113/), plusieurs études expérimentales permettent de préciser l'image des mouvements turbulents dans cette zone. La méthode de visualisation de E.R. CORINO et R.S. BRODKEY (1969) /114/ montre que la sous-couche visqueuse ne doit pas être considérée comme laminaire, car elle est le siège de fluctuations dues aux éjections de fluide dont l'origine se situe dans la zone de production $5 \leq x_2 \leq 70$.

Une étude de la structure de la sous-couche visqueuse par méthode polarographique a été effectuée par B. PY (1973) /115/ qui conduit aux expressions

$$\begin{aligned} \frac{R_{11}}{v_*^2} &\approx 0,09 x_{2*}^2 & \frac{R_{33}}{v_*^2} &\approx 0,013 x_{2*}^2 \\ R_{22} &\approx 5,9 \frac{v_*^2}{\Lambda_{11}^2} x_{2*}^4 & \Lambda_{11} &\text{échelle intégrale de } v_1 \\ & & &\text{dans la direction } ox_1 \end{aligned}$$

La diffusivité thermique près d'une paroi est étudiée par T. MIZUSHINA, R. ITO et F. OGINO (1970) /116/ par une méthode interférométrique, les auteurs arrivent à la conclusion

$$\frac{D_t}{v} = 1,31 \cdot 10^{-5} x_{2*}^4 \quad 4 < x_{2*} \leq 14$$

Dans le présent modèle de turbulence le comportement des corrélations près des parois est essentiellement déterminé par les paramètres a , b et η .

Le choix $a = 0,8$; $b = 2,4$; $\eta = 2,5$ qui semble présenter quelques avantages numériques conduit d'après les équations simplifiées (78) à (88) aux résultats

$$\begin{aligned} q &\sim R_{11} \sim R_{33} \sim x_2^4 & R_{22} &\sim x_2^8 & R_{12} &\sim x_2^6 \\ \varepsilon_t &\sim x_2^4 & D_t &\sim v_t & & \sim x_2^6 \end{aligned}$$

Les valeurs un peu élevées des exposants obtenus à la paroi même décroissent rapidement dès que l'on s'éloigne de la paroi. D'autre part, les valeurs comparées des diverses corrélations doubles restent en accord qualitatif avec les expériences.

III-3.4 Ecoulement turbulent unidirectionnel à gradient transversal de vitesse.

L'écoulement se fait dans le sens ox_1 et le gradient de vitesse est uniforme dans le sens ox_2 .

Le système d'équations correspondant s'écrit :

$$\begin{aligned}\bar{v}_1 q_{,1} &= -R_{12} \bar{v}_{1,2} - \frac{uq}{\delta^2} \\ \bar{v}_1 \delta^2_{,1} &= \omega \frac{R_{12} \delta^2}{q} \bar{v}_{1,2} + u \Delta \\ \bar{v}_1 L_{,1} &= \beta \sqrt{q} - \beta u \frac{L}{\delta^2} \\ \bar{v}_1 R_{11,1} &= \left(-\frac{4}{3} \alpha - \frac{2}{3} \chi - 2\right) R_{12} \bar{v}_{1,2} - \frac{\zeta \sqrt{q}}{2 L} \left(R_{11} - \frac{2}{3} q\right) - u \frac{R_{11}}{\delta^2} \\ \bar{v}_1 R_{22,1} &= \left(\frac{4}{3} \chi - \frac{2}{3} \alpha\right) R_{12} \bar{v}_{1,2} - \frac{\zeta \sqrt{q}}{2 L} \left(R_{22} - \frac{2}{3} q\right) - u \frac{R_{22}}{\delta^2} \\ \bar{v}_1 R_{33,1} &= -\left(\frac{2}{3} \alpha + \frac{2}{3} \chi\right) R_{12} \bar{v}_{1,2} - \frac{\zeta \sqrt{q}}{2 L} \left(R_{33} - \frac{2}{3} q\right) - u \frac{R_{33}}{\delta^2} \\ \bar{v}_1 R_{12,1} &= -R_{22} \bar{v}_{1,2} + \alpha R_{22} \bar{v}_{1,2} + \chi R_{11} \bar{v}_{1,2} - \gamma q \bar{v}_{1,2} \\ &\quad - \frac{\zeta \sqrt{q}}{2 L} R_{12} - u \frac{R_{12}}{\delta^2}\end{aligned}\tag{90}$$

L'évolution des échelles de turbulence est supposée lente et on suppose qu'il y a équilibre approximatif entre production et dissipation d'énergie turbulente.

$$- R_{12} \bar{v}_{1,2} \approx \frac{uq}{\delta^2} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{q}}{L} \approx \frac{u}{\delta^2}$$

Dans ces conditions, on déduit de (87) :

$$\begin{aligned} \frac{R_{11} - \frac{2}{3} q}{2 q} &= \frac{2 - (2 \alpha - \chi)}{3 (1 + \zeta/2)} \\ \frac{R_{22} - \frac{2}{3} q}{2 q} &= \frac{-1 + (\alpha - 2 \chi)}{3 (1 + \zeta/2)} \\ \frac{R_{33} - \frac{2}{3} q}{2 q} &= \frac{-1 + (\alpha + \chi)}{3 (1 + \zeta/2)} \\ \left(\frac{R_{12}}{q} \right)^2 &= \frac{3 \gamma (1 + \zeta/2) + (1 - \alpha)(\zeta + 2\alpha - 4\chi) - \chi (6 + \zeta - 4\alpha + 2\chi)}{3 (1 + \zeta/2)^2} \end{aligned} \quad (91)$$

La réalisation expérimentale de ce type d'écoulement a été effectuée par W.G. ROSE (1966) /117/ puis reprise par F.H. CHAMPAGNE, V.G. HARRIS et S. CORRSIN (1970) /118/. Ces derniers ont constaté une lente augmentation des échelles de turbulence qui traduit une évolution continue de la structure de l'écoulement. Les intensités de turbulence décroissent à partir de la grille génératrice jusqu'à des valeurs presque constantes, caractéristiques du cisaillement et de l'échelle de la turbulence.

On tire de l'article :

$$\frac{\sqrt{R_{11}}}{U} \approx 0,0175 \quad \frac{\sqrt{R_{22}}}{U} \approx 0,0125 \quad \frac{\sqrt{R_{33}}}{U} \approx 0,0135$$

$$- \frac{R_{12}}{U^2} \approx 1,10 \cdot 10^{-4}$$

U vitesse moyenne centrale

Le jeu de constantes $\zeta = 5$ $\alpha = 0,3$ $\gamma = 0,3$ $\chi = 0,1$
conduit à un assez bon accord avec les valeurs d'origine expérimentale:

	d'après F.H. CHAMPAGNE V.G. HARRIS et S. CORRSIN	Expressions algébriques (91)
$\frac{R_{11} - \frac{2}{3} q}{2 q}$	0,140	0,143
$\frac{R_{22} - \frac{2}{3} q}{2 q}$	- 0,090	- 0,086
$\frac{R_{33} - \frac{2}{3} q}{2 q}$	- 0,050	- 0,057
$\frac{R_{12}}{q}$	0,34	0,39

III-3.5 Distorsion uniforme de turbulence homogène

Considérons des écoulements turbulents dans lesquels la
vitesse est fonction linéaire de l'espace :

$$\bar{v}_i = G_{ij} x_j + b_i$$

Comme précédemment, on admettra - $R_{ij} \bar{v}_{i,j} \approx \frac{uq}{\delta^2}$

et $\frac{\sqrt{q}}{L} \approx \frac{u}{\delta^2}$

Une équation d'évolution pour les rapports $r_{ij} = R_{ij}/q$
est obtenue à partir de l'identité

$$\frac{dr_{ij}}{dt} = \frac{1}{q} \frac{dR_{ij}}{dt} - \frac{r_{ij}}{q} \frac{dq}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{dr_{ij}}{dt} = & - r_{ik} G_{jk} - r_{jk} G_{ik} - \frac{\zeta}{2} \frac{\sqrt{q}}{L} (r_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij}) \\ & - \gamma (G_{ij} + G_{ji}) + \alpha (r_{il} G_{jl} + r_{jl} G_{il} - \frac{2}{3} r_{kl} G_{kl} \delta_{ij}) \\ & + \chi (r_{il} G_{lj} + r_{jl} G_{li} - \frac{2}{3} r_{kl} G_{kl} \delta_{ij}) + r_{ij} r_{kl} G_{kl} \quad (92) \end{aligned}$$

Un cas particulier étudié par A.A. TOWNSEND /13/ correspond à la matrice G_{ij} suivante

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$\bar{v}_1 = C \frac{te}{L} \quad \bar{v}_2 = -ax_2 \quad \bar{v}_3 = ax_3$$

$$r_{kl} G_{kl} = - \frac{v}{L^2} = - \frac{\sqrt{q}}{L} = a (r_{33} - r_{22})$$

Les équations (92) fournissent les résultats

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{2\alpha + 2\chi + \zeta}{3(1 + \zeta/2)} \\ r_{22} &= \frac{3 - \alpha - \chi + \zeta - \sqrt{3(1-\alpha-\chi)(3-\alpha-\chi+\zeta)}}{3(1 + \zeta/2)} \\ r_{33} &= \frac{3 - \alpha - \chi + \zeta + \sqrt{3(1-\alpha-\chi)(3-\alpha-\chi+\zeta)}}{3(1 + \zeta/2)} \end{aligned} \quad (93)$$

Le tableau suivant montre la comparaison entre les valeurs calculées et les résultats expérimentaux de A.A. TOWNSEND /13/ et H.J. TUCKER, A.J. REYNOLDS (1968) /119/

	d'après A.A. TOWNSEND	d'après H.J. TUCKER & A.J. REYNOLDS	expressions algébriques (93)
$R_{11} / \frac{2}{3} q$	0,99	1,05	0,85
$R_{22} / \frac{2}{3} q$	0,57	0,39	0,55
$R_{33} / \frac{2}{3} q$	1,44	1,56	1,60
$\frac{R_{33} - R_{22}}{R_{33} + R_{22}}$	0,43	0,60	0,49

III-3.6 Le choix des constantes fondamentales

L'étude d'écoulements simples a permis de fixer une valeur approchée des principales constantes du modèle. Les autres constantes numériques, qui ne peuvent pas aisément être déterminées par ce moyen, sont obtenues par optimisation numérique effectuée sur quelques écoulements présentant des géométries assez variées (jet plan turbulent, écoulement entre plaques planes, écoulements dissymétriques).

Les valeurs finalement retenues pour l'ensemble des constantes sont les suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 A_1 = 0,10 & B_1 = 0,01 & A_t = 0,175 \\
 A_s = 0,18 & A_{sq} = 0,05 & A_L = 0,08 \\
 \omega = 0,532 & \zeta = 5,00 & \beta = 0,40 \\
 \Delta = 1 & \text{si } \epsilon_t / \nu > 0,92 & A_o = 0,175 \\
 & = 0,4 & \text{si } \epsilon_t / \nu < 0,92 & A_p = A_o \\
 \gamma = 0,30 & \alpha = 0,30 & \chi = 0,10 \\
 a = 0,80 & b = 2,40 & \eta = 2,50
 \end{array} \quad (94)$$

Il est dès lors possible de préciser la description de l'écoulement schématisé à cisaillement constant près d'une paroi. L'application de la relation (74) conduit à $\frac{1}{\kappa} \approx 2,7$, valeur un peu plus élevée que celle habituellement proposée pour décrire les profils logarithmiques de vitesse dans la couche-limite et les conduites, mais

cependant très proche de celle obtenue expérimentalement par G. COMTE-BELLOT /129/ dans l'écoulement turbulent entre plaques planes. La relation (77) fournit une valeur de Pr_t voisine de l'unité.

La vérification directe des nombreuses hypothèses sur les corrélations turbulentes et le choix des valeurs des constantes numériques introduites nécessiterait l'analyse de mesures expérimentales portant sur les corrélations elles-mêmes dans des géométries diverses. Cette méthode, qui conduirait à des conclusions plus sûres, ne peut être actuellement envisagée, car certaines corrélations n'ont pu être mesurées directement (corrélations de pression), d'autres demeurent difficiles à atteindre, certaines régions de l'écoulement peuvent ne pas être accessibles aux mesures.

Le modèle a été testé par l'application à divers types d'écoulements et la comparaison des résultats du calcul avec les mesures d'origine expérimentale. Les hypothèses introduites sont donc vérifiées par leurs conséquences.

II-4 VERSIONS SIMPLIFIEES

II-4.1 Modèle de viscosité turbulente

Une première version simplifiée utilise le concept de viscosité turbulente, notion qui malgré ses limitations théoriques, permet d'obtenir des résultats pratiques pouvant constituer une première approche descriptive comprenant l'évaluation de l'énergie turbulente et des caractéristiques de l'écoulement moyen.

Par analogie avec le transfert de quantité de mouvement par viscosité moléculaire on pose :

$$R_{ij} = \frac{2}{3} q \delta_{ij} - \nu_t (\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{j,i}) \quad (95)$$

où ν_t représente le coefficient de viscosité de turbulence pris égal à ϵ_t défini antérieurement. La relation (95) permet de remplacer les six inconnues R_{ij} par les deux seules inconnues ν_t et q en plus de

$\bar{v}_1$ sachant que $v_t = A_o L \sqrt{q}$. Soulignons cependant que cette hypothèse quoique séduisante par sa simplicité est assez sévèrement limitée. Elle suppose en effet la turbulence faiblement anisotrope et faiblement inhomogène.

La seule équation de transport de q suffit, outre les équations d'échelles, pour résoudre le problème :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \bar{v}_j q_{,j} = - R_{ij} \bar{v}_{i,j} + A_q (L \sqrt{q} q_{,j})_{,j} - \frac{vq}{\delta^2} + v q_{,jj} \quad (96)$$

Les constantes A_s et A_L ont été légèrement retouchées afin de vérifier la condition analogue à (74) sur la pente des profils logarithmiques de vitesse dans l'écoulement près des parois. Le jeu de constantes utilisé dans cette version est :

$$\begin{array}{lll} A_q = 0,185 & A_o = 0,175 & A_t = 0,175 \\ A_s = 0,240 & A_{sq} = 0,055 & A_L = 0,100 \\ \Delta = 1 & \text{si } v_t/v > 0,92 & \omega = 0,532 \\ & = 0,4 & \text{si } v_t/v \leq 0,92 \\ a = 0,80 & b = 2,40 & \beta = 0,400 \end{array} \quad (97)$$

Remarque : Dans un écoulement cisailé on retrouve d'après (95)

$$R_{12} \approx - v_t \bar{v}_{1,2}$$

Si l'on suppose en outre que la production de turbulence équilibre sa dissipation,

$$v_t (\bar{v}_{1,2})^2 \approx v \frac{q}{\delta^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{q} \approx \frac{vL}{\delta^2}$$

Il en résulte

$$q = A_o L^2 (\bar{v}_{1,2})^2 \quad \text{et} \quad v_t = A_o^{3/2} L^2 |\bar{v}_{1,2}|$$

et posant $\ell = A_o^{3/4} L$ on retrouve, dans ce cas particulier la formulation de l'hypothèse de longueur de mélange.

II-4.2 Modèle de transport de la contrainte de cisaillement turbulent

Dans le cas général une relation locale du type (95) ne peut être correcte en principe, R_{ij} se trouvant influencé par les agitations turbulentes provenant de régions plus éloignées.

En limitant cette fois l'étude aux écoulements bidimensionnels cisailés, l'introduction d'une équation de transport pour la corrélation R_{12} , permet de tenir compte des effets diffusifs et des effets de mémoire négligés par (95) et de donner par suite une image plus fidèle de la réalité.

La formulation retenue pour l'équation de R_{12} dans le cadre de cette deuxième version simplifiée est la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{12}}{\partial t} + \bar{v}_j R_{12,j} = & - C q \bar{v}_{1,2} + 2 A_1 (L \sqrt{q} R_{12,2})_{,2} \\ & - \frac{\zeta}{2} f \frac{\sqrt{q}}{L} R_{12} - \nu \frac{R_{12}}{\delta^2} - \eta \frac{\nu}{q^2} R_{12} q_{,2} q_{,2} + \nu R_{12,22} \end{aligned} \quad (98)$$

Les constantes numériques sont celles du tableau (94) et en particulier C est obtenue en supposant :

$$\frac{R_{11}}{q} \approx 1 \quad \frac{R_{22}}{q} \approx 0,5 \quad \text{d'où}$$

$$C = \gamma + (1 - \alpha) \frac{R_{22}}{q} - \chi \frac{R_{11}}{q} = 0,56$$

L'évolution de la turbulence est décrite par l'ensemble des équations de transport (2), (96), (27), (39) auxquelles devra être jointe ou bien la loi de comportement (95) dans le cas de la version (II-4.1) ou bien l'équation d'évolution de R_{12} (98) dans le cas de la version (II-4.2).

Cette dernière version se trouve intermédiaire entre la première version utilisant l'hypothèse de viscosité de turbulence et la version complète qui seule permet une évaluation de toutes les composantes du tenseur de REYNOLDS, niveau de complexité qui semble nécessaire pour aborder l'étude d'écoulements dans des géométries plus compliquées.

CHAPITRE III

ÉCOULEMENTS TURBULENTS EN CONDUITE

Le modèle a été appliqué dans un premier temps sous sa forme simplifiée à l'étude de l'écoulement turbulent établi dans un canal bidimensionnel et dans un tube circulaire. Les calculs ont été effectués pour divers nombres de REYNOLDS recouvrant la zone de transition et pour diverses conditions de transfert thermique. Cette étude ayant permis une première approche, il convenait de l'étendre à la formulation complète qui permet une description plus détaillée du champ turbulent. La mise en oeuvre du modèle complet nécessitant des temps de calcul assez élevés, quelques nombres de REYNOLDS seulement ont été traités, dans le cas des conduites planes et circulaires et des espaces annulaires.

III-1 L'APPROCHE NUMÉRIQUE

III-1.1. Formulation adimensionnelle

La distance entre les deux parois parallèles ou le diamètre du tube seront désignés par $2h$ dans la direction ox_2 et l'écoulement se fait dans la direction ox_1 .

Le système d'équations est rendu adimensionnel par l'introduction de groupements construits sur h et u qui sont des grandeurs constantes.

Coordonnées réduites d'espace et de temps :

$$X = x_1/h \quad Y = x_2/h \quad \theta = ut/h^2$$

Fonctions réduites :

$$\begin{aligned} U &= \frac{\bar{v}_1 h}{u} & R_{ij} &= \frac{R_{ij} h^2}{u^2} & Q &= \frac{q h^2}{u^2} \\ S &= \frac{s^2}{h^2} & L &= \frac{L}{h} & \Gamma &= \frac{h^3}{u^2} \left(\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_1} \right) \\ T &= \frac{\Delta T}{\Delta T_0} & \Lambda &= \frac{h}{\Delta T_0} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

a) Problème dynamique dans la version simplifiée.

La vitesse moyenne et l'énergie de turbulence sont obtenues par résolution du système :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \theta} &= -\Gamma - \frac{1}{Y^\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} (Y^\epsilon R_{12}) + \frac{1}{Y^\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y^\epsilon \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \\ \frac{\partial Q}{\partial \theta} &= -R_{12} \frac{\partial U}{\partial Y} + A_q \frac{1}{Y^\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} (L \sqrt{Q} Y^\epsilon \frac{\partial Q}{\partial Y}) \\ &+ \frac{1}{Y^\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y^\epsilon \frac{\partial Q}{\partial Y} \right) - Q/S \\ \frac{\partial S}{\partial \theta} &= \omega \frac{S}{Q} R_{12} \frac{\partial U}{\partial Y} + \Delta + A_s \frac{S^2}{Y^\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{L \sqrt{Q}}{S^2} Y^\epsilon \frac{\partial S}{\partial Y} \right) \\ &+ a \frac{S^2}{Y^\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{Y^\epsilon}{S^2} \frac{\partial S}{\partial Y} \right) - A_{sq} \frac{S^2}{Q Y^\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{L \sqrt{Q}}{S} Y^\epsilon \frac{\partial Q}{\partial Y} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \beta \sqrt{Q} + A_L \frac{1}{Y^\varepsilon} \frac{\partial}{\partial Y} (L \sqrt{Q} Y^\varepsilon \frac{\partial L}{\partial Y}) - \beta L/S$$

$$+ \frac{b}{Y^\varepsilon} \frac{\partial}{\partial Y} (Y^\varepsilon \frac{\partial L}{\partial Y})$$

$\varepsilon = 0$ pour le problème plan

$\varepsilon = 1$ pour le problème axisymétrique

La contrainte de cisaillement R_{12} est définie ou bien par

$$R_{12} = - A_0 L \sqrt{Q} \frac{\partial U}{\partial Y} \quad (3)$$

dans le cadre du modèle simple de viscosité turbulente (§ II-4.1) ou bien par l'équation de transport :

$$\frac{\partial R_{12}}{\partial \theta} = - C Q \frac{\partial U}{\partial Y} + 2 A_1 \frac{1}{Y^\varepsilon} \frac{\partial}{\partial Y} (L \sqrt{Q} Y^\varepsilon \frac{\partial R_{12}}{\partial Y})$$

$$- 2 A_1 \varepsilon L \sqrt{Q} \frac{R_{12}}{Y^2} - \frac{\zeta}{2} f \frac{\sqrt{Q}}{L} R_{12} - \frac{R_{12}}{S}$$

$$+ \frac{1}{Y^\varepsilon} \frac{\partial}{\partial Y} (Y^\varepsilon \frac{\partial R_{12}}{\partial Y}) - \varepsilon \frac{R_{12}}{Y^2} - \eta \frac{R_{12}}{Q^2} (\frac{\partial Q}{\partial Y})^2 \quad (4)$$

dans le cadre de la version intermédiaire (§ II-4.2).

Les conditions aux limites dynamiques sont

$U = Q = S = L = 0$ sur la paroi lisse

$dU = dQ = dS = dL = 0$ sur un axe de symétrie.

Dans le cas de l'application de l'équation (4) on pose $R_{12} = 0$ à la fois sur une paroi et sur un axe de symétrie.

b) Description du champ turbulent d'après le modèle complet.

Les contraintes de Reynolds sont solution des équations de transport :

$$\frac{\partial R_{11}}{\partial \theta} = -2 \left(1 - \frac{2}{3} \alpha f + \frac{1}{3} \chi f\right) R_{12} \frac{\partial U}{\partial Y} - R_{11} / S$$

$$+ A_1 \frac{1}{Y^\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} (L \sqrt{Q} Y^\epsilon \frac{\partial R_{11}}{\partial Y}) - \frac{\zeta}{2} f \frac{\sqrt{Q}}{L} (R_{11} - \frac{2}{3} Q)$$

$$+ \frac{1}{Y^\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} (Y^\epsilon \frac{\partial R_{11}}{\partial Y}) + \frac{2}{3} \eta \frac{R_{22}}{Q^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)^2$$

$$\frac{\partial R_{22}}{\partial \theta} = -2 \left(\frac{1}{3} \alpha f - \frac{2}{3} \chi f\right) R_{12} \frac{\partial U}{\partial Y} - R_{22} / S$$

$$+ 3 A_1 \frac{1}{Y^\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} (L \sqrt{Q} Y^\epsilon \frac{\partial R_{22}}{\partial Y}) + 2 A_1 \epsilon L \sqrt{Q} \left(2 \frac{R_{33} - R_{22}}{Y^2}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{Y} \frac{\partial R_{33}}{\partial Y}\right)$$

$$+ 2 B_1 \frac{\partial}{\partial Y} (L \sqrt{Q} \frac{\partial Q}{\partial Y}) - \frac{\zeta}{2} f \frac{\sqrt{Q}}{L} (R_{22} - \frac{2}{3} Q)$$

$$+ \frac{1}{Y^\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} (Y^\epsilon \frac{\partial R_{22}}{\partial Y}) - 2 \epsilon \frac{R_{22} - R_{33}}{Y^2} - \frac{4}{3} \eta \frac{R_{22}}{Q^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)^2 \quad (5)$$

$$\frac{\partial R_{33}}{\partial \theta} = -2 \left(\frac{1}{3} \alpha f + \frac{1}{3} \chi f\right) R_{12} \frac{\partial U}{\partial Y} - R_{33} / S$$

$$+ A_1 \frac{1}{Y^\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} (L \sqrt{Q} Y^\epsilon \frac{\partial R_{33}}{\partial Y}) + 2 A_1 \epsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial Y} (L \sqrt{Q} \frac{R_{22} - R_{33}}{Y}) \right.$$

$$\left. + \frac{L \sqrt{Q}}{Y} \frac{\partial R_{33}}{\partial Y} \right\}$$

$$+ 6 A_1 \epsilon L \sqrt{Q} \frac{R_{22} - R_{33}}{Y^2} + 2 B_1 \epsilon \frac{L \sqrt{Q}}{Y} \frac{\partial Q}{\partial Y} - \frac{\zeta}{2} f \frac{\sqrt{Q}}{L} (R_{33} - \frac{2}{3} Q)$$

$$+ \frac{1}{Y^\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} (Y^\epsilon \frac{\partial R_{33}}{\partial Y}) + 2 \epsilon \frac{R_{22} - R_{33}}{Y^2} + \frac{2}{3} \eta \frac{R_{22}}{Q^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{12}}{\partial \theta} = & - (1 - \alpha f) R_{22} \frac{\partial U}{\partial Y} + \chi f R_{11} \frac{\partial U}{\partial Y} - \gamma Q \frac{\partial U}{\partial Y} - R_{12} / S \\ & + 2 A_1 \frac{1}{Y^\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} (L \sqrt{Q} Y^\epsilon \frac{\partial R_{12}}{\partial Y}) - 2 A_1 \epsilon L \sqrt{Q} \frac{R_{12}}{Y^2} \\ & - \frac{\zeta}{2} f \frac{\sqrt{Q}}{L} R_{12} + \frac{1}{Y^\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} (Y^\epsilon \frac{\partial R_{12}}{\partial Y}) - \frac{\epsilon R_{12}}{Y^2} - \eta \frac{R_{12}}{Q^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial Y} \right)^2 \end{aligned}$$

Les conditions aux limites associées sont d'une part $R_{ij} = 0$ sur une paroi lisse et d'autre part $dR_{11} = dR_{22} = dR_{33} = 0$ et $R_{12} = 0$ sur l'axe de symétrie.

Dans chaque cas le gradient de pression réduit Γ est fixé au départ et la résolution numérique du système sous sa forme complète ou simplifiée permet d'obtenir les profils des diverses grandeurs turbulentes sur toute la largeur du canal et par intégration de la courbe de vitesse, le nombre de Reynolds et le coefficient de perte de charge.

Dans l'écoulement entre plaques planes

$$\begin{aligned} Re &= 4 \int_0^1 U \, dY & Re &= \frac{4 \bar{u}_o h}{u} \\ U_* &= \frac{v_* h}{u} = \sqrt{\Gamma} = \sqrt{(\partial U / \partial Y)_o} \\ \lambda_* / 8 &= \frac{\tau_o}{\rho V} = \left(\frac{v_*}{V} \right)^2 = \frac{16 \Gamma}{Re^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Dans un tube circulaire

$$\begin{aligned} Re &= 4 \int_0^1 Y U \, dY & Re &= \frac{2 \bar{u}_o h}{u} \\ U_* &= \frac{v_* h}{u} = \sqrt{\Gamma/2} = \sqrt{(\partial U / \partial Y)_o} \\ \lambda_* / 8 &= \frac{\tau_o}{\rho V} = \left(\frac{v_*}{V} \right)^2 = \frac{2 \Gamma}{Re^2} \end{aligned} \quad (7)$$

c) Problème thermique

L'équation de la chaleur est également écrite sous forme adimensionnelle

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta} = - \Lambda + \frac{1}{Y^\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} (A_t S Q Y^\epsilon \frac{\partial \bar{T}}{\partial Y}) + \frac{1}{Pr} \frac{1}{Y^\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} (Y^\epsilon \frac{\partial \bar{T}}{\partial Y}) \quad (8)$$

Plusieurs conditions d'échange de chaleur aux parois sont envisagées.

1°) Transfert à flux calorifique constant

Les conditions aux limites associées à l'équation de la chaleur (8) sont imposées dans une section X déterminée. On pose $\partial \bar{T} / \partial Y = 0$ sur une paroi isolante ou sur un axe de symétrie et $\bar{T} = 0$ sur la paroi soumise à l'échange.

Le bilan d'énergie entre deux sections distantes de dx_1 fournit une relation globale entre le gradient longitudinal de température moyenne du fluide $d \bar{T}_f / dx_1$ et le flux de chaleur constant à la paroi $j_o = \alpha_j (\bar{T}_p - \bar{T}_f)$. $\bar{T}_f$ représente la température moyenne du fluide dans la section droite considérée.

L'introduction des groupements

$$J = j_o \frac{h}{\lambda \Delta \bar{T}_o} \quad \bar{T}_f = \frac{\Delta \bar{T}_f}{\Delta \bar{T}_o} \quad (9)$$

conduit à la formulation simple :

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{2 J}{Re.Pr} && \text{(Plaques planes parallèles,} \\ &&& \text{transfert sur une seule face)} \\ \Lambda &= \frac{4 J}{Re.Pr} && \text{(Plaques planes parallèles,} \\ &&& \text{transfert sur les deux faces)} \\ \Lambda &= \frac{4 J}{Re.Pr} && \text{(tubes circulaires)} \end{aligned} \quad (10)$$

2°) Transfert à température de paroi constante.

Le gradient longitudinal réduit de température Λ est cette fois supposé nul dans l'équation (8) et on pose en outre $\bar{T} = 0$ sur la paroi dont la température est fixée. La résolution de l'équation de la chaleur décrit alors l'évolution temporelle de la température dans l'écoulement et le coefficient de transfert de chaleur α_T défini par $j_o = \alpha_T (\bar{T}_p - \bar{T}_f)$ tend vers une valeur asymptotique utilisée pour la définition du nombre de Nusselt.

Dans tous les cas, le nombre de Nusselt est calculé à partir du profil de température obtenu numériquement :

$$\begin{aligned} \text{Nu} &= \frac{4 j_o h}{\lambda (\bar{T}_p - \bar{T}_f)} = \frac{4}{\bar{T}_f - \bar{T}_p} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial Y} \right)_o \quad (\text{plaques planes}) \\ \text{Nu} &= \frac{2 j_o h}{\lambda (\bar{T}_p - \bar{T}_f)} = \frac{2}{\bar{T}_f - \bar{T}_p} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial Y} \right)_o \quad (\text{tubes circulaires}) \end{aligned} \quad (11)$$

La température de frottement définie par $T_* = \frac{j_o}{\rho C_p v_*}$ est calculée par :

$$T_* = \frac{T_*}{\Delta T_o} = \frac{1}{U_* \text{Pr}} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial Y} \right)_o$$

III-1.2 Méthode numérique de résolution

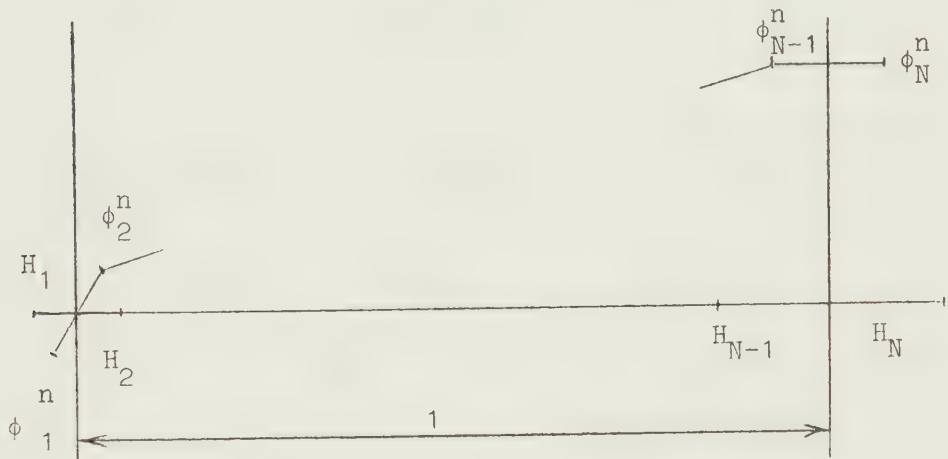
Les équations ont été discrétisées à l'aide d'une méthode de différences finies suivant un schéma implicite qui permet de réduire les temps de calcul. Un maillage à pas variable, davantage resserré près des parois où les gradients prennent des valeurs importantes a été introduit. Le pas d'espace est donné par l'expression

$$H_j = \frac{\alpha_e}{N-2} + \frac{2(1-\alpha_e)}{(N-1)(N-2)} \quad (j-1) \quad (12)$$

N étant le nombre total de points et α_e un paramètre vérifiant $0 < \alpha_e < 1$ qui contrôle la variation du pas.

Chaque fonction du système aux dérivées partielles, désignée sous le nom générique ϕ , est représentée par ses N valeurs ϕ_j^n à l'instant n associées au centre des mailles H_j .

La relation (12) vérifie $\sum_{j=2}^{N-1} H_j = 1$, car les mailles extrêmes H_1 et H_N correspondent à des points fictifs destinés à l'introduction des conditions aux limites.



Grille de discrétisation

Les équations se présentent toutes sous la forme générale d'équations paraboliques d'évolution.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial Y} \left(a \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right) + b \quad (13)$$

qui s'écrivent une fois discrétisées :

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\delta \theta} = \frac{1}{H_j} \left(a_j + \frac{1}{2} \frac{\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1}}{H_{j+\frac{1}{2}}} - a_{j-\frac{1}{2}} \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_{j-1}^{n+1}}{H_{j-\frac{1}{2}}} \right) + b_j \quad (14)$$

$$\text{où } H_j + \frac{1}{2} = (H_j + H_{j+1}) / 2$$

$$H_j - \frac{1}{2} = (H_j + H_{j-1}) / 2$$

$$a_j + \frac{1}{2} = \frac{a_j H_{j+1} + a_{j+1} H_j}{H_j + H_{j+1}}$$

$$a_j - \frac{1}{2} = \frac{a_j H_{j-1} + a_{j-1} H_j}{H_j + H_{j-1}}$$

Les grandeurs a_j et b_j dépendent en général des autres fonctions du système, dans ce cas la dernière valeur calculée sera utilisée. Ainsi, la valeur d'une fonction ϕ_j^{n+1} une fois calculée à l'instant $n+1$, c'est immédiatement qu'elle pourra être utilisée dans les autres équations. Ce procédé de calcul a été présenté par B.J. DALY et F.H. HARLOW /97/ pour la résolution d'équations de transport de turbulence.

Les conditions aux limites sont introduites aux extrémités du maillage. Par exemple, la condition $\phi = 0$ pour $Y = 0$ sera exprimée par

$$\phi_1 = -\phi_2$$

et la condition $d\phi = 0$ pour $Y = 1$ par

$$\phi_{N-1} = \phi_N$$

Les équations de la forme (14) obtenues pour chaque fonction sont des relations de récurrence à trois termes

$$A_j \phi_j^{n+1} = B_j \phi_{j+1}^{n+1} + C_j \phi_{j-1}^{n+1} + D_j \quad (15)$$

qui forment un système matriciel tridiagonal.

Il existe, pour la résolution de tels systèmes, une méthode itérative très efficace /120/ dérivée de la méthode de GAUSS. La technique utilisée se résume ainsi : une relation de récurrence linéaire est recherchée entre deux itérés successifs sous la forme

$$\phi_j = \alpha_j \phi_{j+1} + \beta_j \quad (16)$$

Il est possible de calculer les coefficients α_j et β_j à l'aide d'une récurrence secondaire déterminée par la connaissance des A_j , B_j , C_j et D_j .

$$\alpha_i = \frac{B_i}{A_i - C_i \alpha_{i-1}} \quad \beta_i = \frac{C_i \beta_{i-1} + D_i}{A_i - C_i \alpha_{i-1}} \quad (17)$$

α_1 et β_1 étant déterminés par les conditions aux limites au point 1.

La fonction ϕ est obtenue dans un deuxième temps à l'aide de la récurrence (16) à partir de ϕ_N déterminé par les conditions aux limites en N.

Les conditions initiales relatives aux diverses grandeurs ont été choisies assez proches de celles observées expérimentalement de manière à réduire le temps de calcul.

Plaques planes

$$U = \frac{Re}{4} Y^{1/7}$$

$$\left. \begin{aligned} R_{11} &= -240 \Gamma Y^2 \\ R_{22} &= -120 \Gamma Y^2 \\ R_{33} &= -120 \Gamma Y^2 \\ R_{12} &= +90 \Gamma Y^2 \\ S &= 0,1 Y^2 \end{aligned} \right\} Y < 0,1$$

$$\left. \begin{aligned} R_{11} &= -2 \Gamma (1,3 - Y) \\ R_{22} &= -\Gamma (1,3 - Y) \\ R_{33} &= -\Gamma (1,3 - Y) \\ R_{12} &= -\Gamma (Y - 1) \\ S &= 10^{-3} \\ L &= S \sqrt{Q} \end{aligned} \right\} Y > 0,1$$

Tubes circulaires

$$U = \frac{Re}{2} (1 - Y)^{1/7}$$

$$\left. \begin{aligned} R_{11} &= -120 \Gamma (1 - Y)^2 \\ R_{22} &= -60 \Gamma (1 - Y)^2 \\ R_{33} &= -60 \Gamma (1 - Y)^2 \\ R_{12} &= -45 \Gamma (1 - Y)^2 \\ S &= 0,1 (1 - Y)^2 \end{aligned} \right\} Y > 0,9$$

$$\left. \begin{aligned} R_{11} &= -\Gamma (Y + 0,3) \\ R_{22} &= -\Gamma (Y + 0,3) / 2 \\ R_{33} &= -\Gamma (Y + 0,3) / 2 \\ R_{12} &= -\Gamma (1 - Y) / 2 \\ S &= 10^{-3} \\ L &= S \sqrt{Q} \end{aligned} \right\} Y < 0,9$$

Le nombre N de points du support de discrétisation utilisé dépend de l'écoulement étudié. Les écoulements aux grands nombres de REYNOLDS présentent près des parois des variations rapides des grandeurs turbulentes et davantage de points sont nécessaires pour les décrire. L'ordre de grandeur de N est $\sqrt{Re}/4$ pour l'écoulement entre plaques planes sur la demi-largeur du canal et $\sqrt{2 Re}$ dans un tube circulaire sur un rayon. La convergence et la stabilité des calculs dépendent du choix des pas d'espace et de temps sans que l'on puisse préciser de critère rigoureux de convergence. La valeur du pas d'espace une fois fixée par le choix de N, on constate que la valeur du pas de temps ne peut excéder une certaine limite au-delà de laquelle une divergence apparaît dès les premières itérations. Le pas de temps a été choisi environ deux à trois fois inférieur à cette valeur limite, sans toutefois qu'une optimisation ait été effectuée dans chaque cas. Une formule empirique a été utilisée.

$$\delta\theta = \frac{k}{Re} \quad (\text{tubes}), \quad \delta\theta = \frac{4k}{Re} \quad (\text{plaques planes})$$

dans laquelle k peut varier de 0,5 (nombres de REYNOLDS élevés) à 2 (nombres de REYNOLDS faibles).

Le régime permanent recherché est considéré comme atteint avec une précision suffisante lorsque :

$$\frac{\max_j \left| -\Gamma + \frac{1}{Y^\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y^\epsilon \frac{\partial U}{\partial Y} - F_{12} \right) \right|}{|\Gamma|} < D_u$$

$$D_u \sim 0,01$$

La convergence est obtenue après 1500 itérations environ et le calcul effectué dans le cadre du modèle complet nécessite pour un nombre de REYNOLDS moyen de 50000 dans un tube circulaire environ 170 s sur ordinateur CDC 7600. Le temps de calcul dans le cas du modèle simplifié est diminué de moitié. Il a été vérifié que l'augmentation du nombre de points du support dans le rapport 1,5 n'affecte que peu les résultats finaux, le nombre de REYNOLDS ne variant pas plus du centième de sa valeur.

III-2 APPLICATION DES MODELES SIMPLIFIES

III-2.1 Résultats relatifs au problème dynamique

Plusieurs calculs ont été effectués dans le cadre du modèle simplifié pour divers gradients de pression réduits Γ allant de 9.10^2 à 3.10^7 dans l'écoulement entre plaques planes parallèles et de 4.10^3 à 4.10^7 dans les tubes circulaires.

Les coefficients de perte de charge $\lambda_* = 8 (v_* / V)^2$ calculés à l'aide de (6) et (7) pour divers nombres de REYNOLDS ont été comparés à ceux d'origine expérimentale (fig.1). L'allure générale des courbes est en accord avec l'expérience. Pour les tubes circulaires les points de calcul s'accordent assez bien avec la loi de Blasius $\lambda_* = 0,316 Re^{-1/4}$. Pour l'écoulement entre plaques planes les points de calcul se situent entre la loi $\lambda_* = 0,165 Re^{-1/6}$ obtenue expérimentalement par V.C. PATEL et M.R. HEAD (1968) /121/ et la loi $\lambda_* = 0,507 Re^{-0,3}$ correspondant aux mesures de G.S. BEAVERS, E.M. SPARROW et J.R. LLOYD (1971) /122/.

D'autre part le modèle permet la prévision du phénomène de transition /123/. Des solutions d'écoulement turbulent peuvent être obtenues pour $|\Gamma|$ supérieur à une certaine valeur $|\Gamma_0|$ tandis que dans la zone $|\Gamma| < |\Gamma_0|$ la résolution des équations effectuée à partir des conditions initiales du type (18) fournit une diminution continue de l'énergie turbulente. Dans ce dernier cas, la turbulence ne peut se maintenir et les calculs conduisent à une solution laminaire avec profil de vitesse parabolique et énergie de turbulence négligeable. La valeur de Γ_0 est proche de - 12000 dans l'écoulement entre plans parallèles et de - 30000 dans un tube circulaire. Dans la région de transition les calculs effectués pour un même gradient de pression réduit peuvent converger suivant le choix des conditions initiales, vers deux types de solutions distinctes. Un niveau initial de turbulence de l'ordre de celui observé dans une turbulence pleinement développée, conduit à une solution d'écoulement turbulent, tandis qu'un niveau initial de turbulence suffisamment faible conduit à une solution laminaire. Les points de calcul obtenus pour une même valeur de Γ dans ce domaine sont représentés sur la figure 1 par un même symbole.

Un résultat analogue a été obtenu par G.S. GLUSHKO (1971) /124/ dans le calcul de la couche limite turbulente sur plaque plane suivant un modèle différentiel de turbulence à deux équations de transport. Il est trouvé que la position du point de transition caractérisé par un accroissement brutal du coefficient de frottement dépend beaucoup du niveau initial de la turbulence.

Les figures 2 et 3 donnent, en coordonnées semi-logarithmiques, les profils de vitesse obtenus par le calcul pour les gradients de pression réduits des tableaux 1 et 2 respectivement. Les profils turbulents pleinement établis présentent une partie rectiligne dont la pente correspond à celle des profils expérimentaux représentés par la formule analytique classique

$$v_1 / v_* = A \log x_{2*} + B$$

Les constantes A et B varient légèrement avec le nombre de REYNOLDS /125/ mais il existe une dispersion assez importante des valeurs de A et B suivant les expérimentateurs /126/ autour des résultats classiques de J. NIKURADSE (A = 2,4 B = 5,8). Les courbes calculées pour les tubes et les plaques planes donnent en moyenne A ≈ 2,6 et B ≈ 4.

Les données expérimentales de J. LAUFER /128/, G. COMTE-BELLOT /129/, J.A. CLARK /130/ pour l'écoulement entre plaques planes parallèles et celles de J. LAUFER /127/ pour les tubes circulaires ont été utilisées à titre de comparaison avec les résultats du calcul en vue de tester le modèle. Les figures 4 à 10 montrent une assez bonne prévision du profil des vitesses moyennes.

La distribution d'énergie cinétique de turbulence (fig.11) ne présente pas un pic aussi accusé que celui fourni par les expériences. Cet écart semble être dû en premier lieu à la simplification trop importante de la version basée sur la viscosité turbulente qui ne permet pas de tenir compte de la forte anisotropie proche des parois.

Le bilan d'énergie turbulente présenté sur la figure 12 donne une bonne prévision des termes dominants de production et de

dissipation. La diffusion turbulente d'énergie cinétique et celle de la fluctuation de pression sont regroupées dans la formulation du modèle en un seul terme, les valeurs expérimentales données par la somme de ces contributions est en accord qualitatif.

III-2.2 Résultats relatifs au problème thermique

a) Transfert de chaleur par métal liquide.

1°) Ecoulement entre plaques planes.

Les conditions considérées dans un premier calcul correspondent à celles des expériences de L. DUCHATELLE et L. VAUTREY (1964) /131/ effectuées à l'aide d'un échangeur à contre courant monté en économiseur constitué par deux veines adjacentes de section très aplatie (4 x 110 mm) qui permettent d'assimiler l'appareil à des plans parallèles indéfinis. Les deux circuits de fluide ayant la même nature, un alliage NaK, et le même débit, la différence entre la température moyenne du fluide chaud et du fluide froid est constante et égale dans toute section à la différence des températures d'entrée et de sortie à chaque extrémité de l'échangeur ; le gradient longitudinal de température est constant. Le domaine exploré va de 3000 à 100000 environ pour les nombres de REYNOLDS Re , de 0,010 à 0,022 environ pour les nombres de PRANDTL et les nombres de PECLET varient de 65 à 1200 environ. L'incertitude des mesures sur le nombre de NUSSELT est estimée à $\pm 10\%$ environ sur toute la plage des valeurs expérimentales.

D'autre part les calculs sur ordinateur ont été effectués pour cinq nombres de REYNOLDS différents $Re = 8000, 22000, 44000, 100000$ et 180000 et dans chaque cas le nombre de PRANDTL a varié de 0,005 à 0,130 /132/.

La figure n° 13 montre la comparaison entre calcul et expériences. Les différentes courbes correspondant à chaque série de calculs à REYNOLDS constant sont portées sur le diagramme. Ces courbes quoique très voisines ne coïncident pas exactement ce qui met en évidence pour le nombre de NUSSELT une légère dépendance séparée du nombre de REYNOLDS et du nombre de PRANDTL.

TABLEAU I

Ecoulement entre plaques planes

	Γ	$\frac{v_* h}{u}$	$Re = \frac{4h \bar{u}_0}{u}$	$Re = \frac{4h V}{u}$	$\lambda_* / 8 \times 10^3$
○	$9 \cdot 10^2$	30	1800	1200	10
▽	$2,25 \cdot 10^3$	47,3	4500	3000	4
⊙	$5,4 \cdot 10^3$	73,5	10800	7200	1,650
△	$1 \cdot 10^4$	100	$20 \cdot 10^3$	$13,3 \cdot 10^3$	0,900
⊗	$1,2 \cdot 10^4$	109	$24 \cdot 10^3$	$16 \cdot 10^3$	0,750
▽	$1,8 \cdot 10^4$	134	$36 \cdot 10^3$	$24 \cdot 10^3$	0,500
			9240	7760	4,789
▽	$3,5 \cdot 10^4$	187	$70,4 \cdot 10^3$	$46,8 \cdot 10^3$	0,257
			14170	12060	3,847
△	$1,1 \cdot 10^5$	331	$25,4 \cdot 10^3$	$22,0 \cdot 10^3$	3,646
△	$2,2 \cdot 10^5$	468	$39,2 \cdot 10^3$	$34,6 \cdot 10^3$	2,938
◇	$3,4 \cdot 10^5$	582	$50,9 \cdot 10^3$	$45,2 \cdot 10^3$	2,681
◇	$1,55 \cdot 10^6$	1240	$115,2 \cdot 10^3$	$102,9 \cdot 10^3$	2,343
□	$7,6 \cdot 10^6$	2750	$271,8 \cdot 10^3$	$245,0 \cdot 10^3$	2,026
▣	$3 \cdot 10^7$	5470	$568,0 \cdot 10^3$	$515,6 \cdot 10^3$	1,806

TABLEAU 2

Ecoulement dans un tube circulaire

	Γ	$\frac{v_* h}{u}$	$Re = \frac{2h \bar{u}_o}{u}$	$Re = \frac{2h V}{u}$	$\lambda_v / 8 \times 10^3$
◻	$4 \cdot 10^3$	44,6	1500	1000	8,00
D	$8 \cdot 10^3$	63,2	3000	2000	4,00
◐	$1,2 \cdot 10^4$	72,4	4500	3000	2,67
○	$3 \cdot 10^4$	122	$\left\{ \begin{array}{l} 11,2 \cdot 10^3 \\ 4600 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 7500 \\ 3330 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,060 \\ 5,390 \end{array} \right.$
◊	$4 \cdot 10^4$	141	$\left\{ \begin{array}{l} 15 \cdot 10^3 \\ 5380 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 10 \cdot 10^3 \\ 3960 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,800 \\ 5,102 \end{array} \right.$
◁	$8 \cdot 10^4$	200	7600	5750	4,840
▽	$6,5 \cdot 10^5$	570	$25,8 \cdot 10^3$	$20,8 \cdot 10^3$	2,990
▽	$1 \cdot 10^6$	706	$33,5 \cdot 10^3$	$26,3 \cdot 10^3$	2,889
△	$2,19 \cdot 10^6$	1050	$50,7 \cdot 10^3$	$40,6 \cdot 10^3$	2,652
▲	$6 \cdot 10^6$	1730	$91,3 \cdot 10^3$	$72,6 \cdot 10^3$	2,277
◇	$2 \cdot 10^7$	3160	$164,1 \cdot 10^3$	$141,5 \cdot 10^3$	1,999
◇	$4 \cdot 10^7$	4470	$245,6 \cdot 10^3$	$208,5 \cdot 10^3$	1,839

En première approximation il est cependant possible d'exprimer le nombre de NUSSELT par une relation analytique en fonction du seul nombre de PECLET sous la forme $Nu = A + B Pe^n$. L'optimisation des coefficients a été effectuée au sens des moindres carrés et a conduit à la relation :

$$Nu = 5,81 + 0,0127 Pe^{0,846}$$

L'accord entre expérience et calcul, très bon aux régimes faiblement turbulents a cependant tendance à se détériorer lorsque Pe augmente.

La figure 14 regroupe quelques corrélations classiques à titre de comparaison :

- les résultats théoriques de W.B. HARRISON et J.R. MENKE /133/ formulés par R.N. LYON

$$Nu = 4,9 + 0,0175 Pe^{0,8}$$

- la formule de O.E. DWYER et P.S. TU /134/ pour les plaques planes et les espaces annulaires minces

$$Nu = 5,42 + 0,0215 Pe^{0,768}$$

- la formule proposée par L. DUCHATELLE et L. VAUTREY /131/

$$Nu = 5,14 + 0,0127 Pe^{0,8}$$

2°) Ecoulement dans un tube circulaire

Les mêmes calculs ont été repris pour les tubes circulaires, les conditions étudiées correspondent cette fois aux expériences de E. SKUPINSKY, J. TORTEL et L. VAUTREY (1964) /135/ sur la détermination des coefficients de convection d'un alliage NaK dans un tube de section circulaire à flux calorifique constant. Le chauffage de la veine de mesure est réalisé à l'aide d'un bobinage enroulé sur la surface extérieure du tube et le coefficient de convection est déterminé par méthode directe à partir de la mesure du flux et des écarts de température entre paroi et fluide. Les valeurs du nombre de REYNOLDS Pe ont varié de 3600 à $9,05 \cdot 10^5$ et les valeurs du nombre de PECLET de 58 à $1,31 \cdot 10^4$. Le nombre de PRANDTL demeure sensiblement constant autour de la valeur $1,54 \cdot 10^{-2}$.

Les calculs sur ordinateur ont été effectués d'autre part

pour $Pr = 1,54 \cdot 10^{-2}$ et plusieurs nombres de REYNOLDS allant de 3000 à 680000.

La figure n° 15 permet la comparaison des points calculés aux formules classiques de LYON-MARTINELLI /136/, B. LUBARSKY et S.J. KAUFMAN /137/ ainsi que les résultats de E. SKUPINSKY, J.TORTEL et L. VAUTREY /135/ représentés par la corrélation

$$Nu = 4,82 + 0,0185 Pe^{0,827}$$

Lorsque le nombre de PRANDTL moléculaire est faible la valeur du transfert dépend beaucoup des conditions de l'échange et le nombre de NUSSELT sera différent suivant que la température ou le flux sont imposés à la paroi /138/. Les calculs numériques repris avec la condition $T_p = \text{cte}$ sur la paroi du tube ont mis en évidence cette modification de la valeur globale du transfert. Les nombres de NUSSELT à $T_p = C^{te}$ sont pour un même nombre de PECLET inférieurs à ceux calculés à flux constant (tableau 3) et l'écart correspond à celui constaté expérimentalement par C.A. SLEICHER, A.S. AWADA et R.H. NOTTER (1973) /139/. Les courbes présentées figure 16 tirées de l'article permettent une comparaison avec les corrélations connues. La modification apportée au profil de température moyenne est illustrée par la figure 17.

TABEAU 3

Comparaison des résultats de transfert à flux constant et à température de paroi constante (tubes circulaires).

Re	Pe	Nu (flux constant)	Nu (T_p constant)
$19,7 \cdot 10^3$	303	8,73	7,15
$26,3 \cdot 10^3$	406	9,34	7,70
$40,6 \cdot 10^3$	625	10,72	8,96
$72,6 \cdot 10^3$	1120	13,21	11,27
$141,5 \cdot 10^3$	2180	17,72	15,51
$208,5 \cdot 10^3$	3200	21,36	18,98

b) Nombres de PRANDTL supérieurs

On a constaté dans les calculs effectués dans le cadre du modèle simplifié utilisant la relation (3) que l'accord entre expérience et calcul sur la prévision du nombre de NUSSELT se détériorait progressivement pour les grands nombres de PECLET. Cet écart est déjà sensible pour $Pr = 4,6$ et $6,8$ correspondant à des valeurs du nombre de PRANDTL de l'eau. La figure 18 montre la position de quelques points calculés par rapport aux résultats de E. SKUPINSKY, J. TORTEL et L. VAUTREY /135/ concernant des mesures à l'eau.

Cette version simplifiée qui repose sur l'idée générale de l'isotropie conduit à des erreurs sur les diffusivités turbulentes près des parois, zone de forte anisotropie, d'autant plus importantes que le nombre de REYNOLDS et le nombre de PRANDTL moléculaire sont plus élevés.

L'utilisation de la deuxième version simplifiée basée sur l'équation de transport de R_{12} (4) a permis d'améliorer la description de la turbulence près de la paroi et d'obtenir ainsi des prévisions du nombre de NUSSELT en bon accord avec les corrélations classiques de COLBURN et de DITTUS-BOELTER (fig. 20 et 21). Les résultats numériques sont par ailleurs en accord avec les résultats expérimentaux regroupés par R.G. DEISSLER /140/ ainsi que B.A. KADER et A.M. YAGLOM /150/.

Cette nouvelle version permet également de retrouver les grandeurs dynamiques moyennes qui caractérisent l'écoulement turbulent conformes à celles obtenues dans la première version simplifiée. La description de la turbulence près de la paroi est améliorée et en particulier la prévision du nombre de PRANDTL turbulent (fig.19). La deuxième formulation se trouve donc applicable sur une plage étendue de nombres de PRANDTL moléculaires recouvrant à la fois les métaux liquides et les liquides organiques ordinaires.

III-3 APPLICATION DU MODELE COMPLET

Quelques exploitations numériques du modèle sous la forme complète, utilisant toutes les équations de transport des corrélations

doubles qui permettent une description plus détaillée du champ turbulent, sont présentées.

III-3.1 Ecoulement entre plaques planes parallèles.

Trois nombres de REYNOLDS ont été considérés, proches de ceux étudiés par J. LAUFER /128/ et G. COMTE-BELLOT /129/. Les résultats du calcul portant sur les caractéristiques globales de l'écoulement sont résumés dans le tableau suivant :

TABLEAU 4

Ecoulement entre plaques planes
(dynamique)

r	$\frac{v_* h}{\nu}$	$Re = \frac{4h \bar{u}}{\nu}$	$Re = \frac{4h V}{\nu}$	$\lambda_* / 8$
$3,4 \cdot 10^5$	583	44880	40660	$0,328 \cdot 10^{-2}$
$7,6 \cdot 10^6$	2757	261200	236600	$0,217 \cdot 10^{-2}$
$3,0 \cdot 10^7$	5477	559600	510000	$0,184 \cdot 10^{-2}$

Les prévisions numériques de l'écoulement moyen, vitesse, température et intensité de turbulence obtenues à l'aide du modèle complet demeurent comparables à celles obtenues à l'aide des modèles simplifiés (fig. 22,23,25,26). L'avantage essentiel du modèle actuel est de fournir une description plus détaillée du champ turbulent à l'aide des corrélations doubles.

La comparaison des corrélations doubles R_{11} , R_{22} et R_{33} calculées (fig. 24,27,28,29) avec les résultats expérimentaux montre que l'ordre de grandeur est obtenu et que l'étagement des courbes dans le sens $R_{11} > R_{33} > R_{22}$ est retrouvé. On remarque également que le maximum de la courbe R_{11} , quoique moins accusé que celui d'origine expérimentale se trouve placé plus proche de la paroi que les maxima des courbes R_{22} et R_{33} . Les courbes calculées et expérimentales de la contrainte de cisaillement R_{12} (fig. 24) présentent un maximum près de la paroi à des distances comparables, le désaccord apparent des

valeurs absolues de cette corrélation provient en grande partie de la différence entre les nombres de REYNOLDS du calcul et de l'expérience utilisés dans la normalisation.

Le transfert de chaleur entre plaques planes à flux constant sur une seule face a été calculé pour divers nombres de PRANDTL, les prévisions du nombre de NUSSELT sont présentées dans le tableau 5 et la figure 30.

On retrouve en particulier pour $Pr = 0,0154$ correspondant au transfert de chaleur par métal liquide des résultats analogues à ceux obtenus à l'aide du modèle simplifié.

TABLEAU 5

Ecoulement entre plaques planes
(transfert thermique)

$Re = 44880$

Pr	0,0154	0,7	1	5,7	10	100	1000
Nu	9,5	88,4	109,2	266,8	336,0	670,0	1145,6
Marg. 10^2	1,52	0,311	0,269	0,115	0,0826	0,0165	0,00281

$Re = 261200$

Pr	0,0154	0,7	1	5,7	10	100	1000
Nu	20,1	339,9	439,5	1284,9	1722,0	4476,8	9750,4
Marg. 10^2	0,551	0,205	0,186	0,0953	0,0728	0,0189	0,00412

$$Re = 559600$$

Pr	0,0154	0,7	1	5,7	10	100	1000
Nu	32,1	622,4	817,6	2554,4	3508,0	9930,0	18958
Marg. 10^2	0,409	0,174	0,160	0,0878	0,0688	0,0195	0,00372

III-3. 2 Ecoulement dans un tube circulaire.

Deux nombres de REYNOLDS ont été considérés dont un voisin des études expérimentales de J. LAUFER. Le tableau suivant résume les caractéristiques globales de l'écoulement.

TABLEAU 6

Ecoulement dans un tube
(dynamique)

Γ	$\frac{v_* h}{u}$	$Re = \frac{2h \bar{u}_o}{u}$	$Pe = \frac{2h V}{u}$	$\lambda_* / 8$
$2,19 \cdot 10^6$	1050	45550	37470	$0,312 \cdot 10^{-2}$
$6 \cdot 10^6$	1744	79350	66000	$0,275 \cdot 10^{-2}$

Les grandeurs moyennes, vitesses, corrélations doubles (fig. 31 à 33) calculées, présentent tout comme dans l'écoulement entre plaques planes parallèles, les mêmes caractéristiques, étagement des courbes, position des maxima que les valeurs d'origine expérimentale. Le modèle permet en outre l'évaluation des échelles de turbulence s et L (fig. 34) mais leur signification demeurant globale elles sont davantage un intermédiaire de calcul et ne peuvent être directement confrontées avec l'expérience. Le calcul des corrélations triples pour $Re = 45550$ (fig. 35) fournit des courbes qui, dans la région centrale du tube, sont étagées dans le sens $T_{222} > T_{112} > T_{332}$ conformément

aux résultats présentés par J. LAUFER, un désaccord apparaît cependant dans la région proche de la paroi.

Les profils de diffusivités turbulentes de chaleur et de quantité de mouvement (fig. 37) présentent un maximum assez proche de l'axe du tube et une forme générale en accord avec les résultats expérimentaux /144/ /145/. Les valeurs du nombre de PRANDTL turbulent proches de la paroi, d'origine expérimentale présentent une assez grande dispersion /152/ /153/ /145/. Cependant, dans la région des profils logarithmiques la valeur moyenne couramment utilisée est légèrement inférieure à l'unité, les expériences récentes de CHE PEN CHEN (1973) /151/ ont conduit à la valeur $Pr_t = 0,885$ environ, qui est précisément l'ordre de grandeur de la valeur calculée.

Le calcul du transfert de chaleur à flux constant pour divers nombres de PRANDTL a été repris dans la version complète du modèle. Les prévisions du transfert de chaleur présentées dans le tableau suivant sont conformes à celles déjà obtenues à l'aide de la deuxième version simplifiée du modèle.

TABLEAU 7

Ecoulement dans un tube
(transfert thermique)

$Re = 45550$

Pr	0,0154	0,7	1	5,7	10	100	1000
Nu	11,4	88,7	108,4	249,1	306,9	589,3	971,7
Marg. 10^2	1,97	0,338	0,289	0,117	0,0819	0,0157	0,00259

Re = 79350

Pr	0,0154	0,7	1	5,7	10	100	1000
Nu	14,2	137,4	170,5	419,6	526,8	1071,7	1902,2
Marg. 10 ²	1,40	0,297	0,258	0,111	0,0798	0,0162	0,00288

Les études expérimentales sur le transfert de chaleur en conduite sont nombreuses /140 à 150/, l'article de B.A. KADER et A.M. YAGLOM (1972) contenant notamment une bibliographie importante. La figure 38 permet la comparaison du nombre de NUSSELT calculé avec les corrélations classiques de DITTUS-BOELTER

$$Nu = (\lambda_* / 8) Re \cdot Pr^{1/3}$$

et de COLBURN

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} \cdot Pr^{0,4}$$

Les résultats numériques sont également en accord avec les données expérimentales tirées des articles de R.G. DEISSLER /140/ et de B.A. KADER et A.M. YAGLOM /150/, notamment la variation du nombre de NUSSELT en fonction du nombre de PRANDTL moléculaire. Les figures 39 et 40 illustrent la déformation du profil des températures en fonction du nombre de PRANDTL. La comparaison, dans le cas de l'air, est donnée avec les résultats de R.E. JOHNK et T.J. HANRATTY /142/ (fig. 41).

III-4 ECOULEMENT DANS LES ESPACES ANNULAIRES

Un type important d'application concerne l'étude numérique des écoulements dissymétriques. L'exemple de l'écoulement turbulent dans un espace annulaire a été considéré.

III-4. 1 Description de l'écoulement.

Les mêmes groupements adimensionnels (1) que précédemment sont introduits dans la formulation des équations, h désignant cette fois la différence entre rayon extérieur et rayon intérieur ($r_2 - r_1$). Les rayons réduits $R_1 = r_1/h$ et $R_2 = r_2/h$ peuvent s'exprimer simplement en fonction du rapport $g = r_1 / r_2$

$$R_1 = \frac{g}{1 - g} \quad R_2 = \frac{1}{1 - g}$$

Les nombres de REYNOLDS Re défini sur la vitesse maximale et $\bar{Re}$ défini sur la vitesse moyenne sont obtenus par

$$Re = 2 \frac{\bar{u}_0 h}{u} \quad \bar{Re} = \frac{4}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} Y U dY$$

Les vitesses de frottement à chacune des deux parois sont données par la pente du profil des vitesses

$$U_{*1} = \frac{v_* h}{u} \sqrt{\left| \frac{\partial U}{\partial Y} \right|_{Y=R_1}} \quad U_{*2} = \frac{v_* h}{u} \sqrt{\left| \frac{\partial U}{\partial Y} \right|_{Y=R_2}}$$

Une vitesse de frottement apparente globale peut également être définie

$$U_* = \frac{v_* h}{u} = \sqrt{\frac{h^3}{2 u^2} \frac{\partial \pi}{\partial x_1}} = \sqrt{\left| \frac{\Gamma}{2} \right|}$$

$$\lambda_* / 8 = \left(\frac{v_*}{u} \right)^2 = \frac{2 \Gamma}{Re^2} \quad (20)$$

Le transfert de chaleur à flux constant a été seul considéré, avec échange sur une seule paroi, l'autre étant adiabatique.

La relation entre le gradient longitudinal de température moyenne du fluide et le flux de chaleur constant à la paroi est obtenue à partir du bilan d'énergie entre deux sections droites de l'espace annulaire.

Dans le cas où le tube intérieur est isolé et le tube extérieur soumis à l'échange :

$$\Lambda = \frac{4 J}{Pr. Re. (1 + g)} \quad (21)$$

Dans le cas contraire où le tube extérieur est isolé et le tube intérieur soumis à l'échange :

$$\Lambda = \frac{4 g J}{Pr. Re. (1 + g)} \quad (22)$$

III-4.2 Résultats numériques.

a) Application du modèle complet

Trois calculs ont été mis en oeuvre pour divers nombres de REYNOLDS et deux valeurs du rapport des rayons $g = r_1/r_2$. Les itérations ont été effectuées à partir de profils initiaux symétriques des grandeurs dynamiques analogues à ceux utilisés dans l'écoulement entre plaques planes.

Le tableau 8 regroupe les caractéristiques globales de l'écoulement obtenues dans chaque cas par le calcul.

TABLEAU 8

Écoulement dans un espace annulaire
(modèle complet)

Γ	$9,5 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^7$	$1 \cdot 10^7$
g	0,562	0,0625	0,0625
Re	93000	215000	101400
Re	83000	187500	87600
U_{*2}	2140	4375	2200
U_{*1}	2250	5450	2840
U_*	2180	4470	2240
$\lambda^*/8$	$0,276 \cdot 10^{-2}$	$0,227 \cdot 10^{-2}$	$0,260 \cdot 10^{-2}$

Les profils de vitesse calculés dans ces trois cas sont en très bon accord avec ceux expérimentaux de J.A. BRIGHTON et J.B. JONES (1964) /158/ obtenus à des nombres de REYNOLDS voisins (fig. 42). La position du maximum des vitesses est d'autant plus proche de la paroi intérieure que g est plus faible (fig. 46) et conformément aux résultats expérimentaux se trouve différente de celle des profils laminaires. De plus, les profils logarithmiques de vitesse tracés à partir des parois intérieure et extérieure sont très proches pour $g = 0,562$ mais présentent une pente nettement différente pour $g = 0,0625$ d'autant plus marquée que le nombre de REYNOLDS est plus élevé (fig. 43 à 45). Ce fait semble montrer que la représentation universelle des profils logarithmiques de vitesse normalisés à l'aide de la vitesse de frottement ne s'étend pas à des écoulements fortement dissymétriques. La dissymétrie des courbes représentatives des corrélations doubles (fig. 47 et 48) est retrouvée par le calcul qui fournit par ailleurs une position légèrement différente pour les minima de chacune des corrélations R_{11} , R_{22} et R_{33} .

La solution numérique présente également un écart entre le point d'annulation de la contrainte de cisaillement turbulent et le point maximum du profil de vitesse moyenne, écart négligeable pour $g = 0,562$ mais très sensible pour g faible égal à $0,0625$ (fig. 49). Dans cet intervalle une production négative d'énergie turbulente est obtenue (fig. 50). Cette particularité due à la dissymétrie de l'écoulement a été constatée expérimentalement par J. MATHIEU (1961) /154/ dans l'étude aérothermique d'un jet plan frappant une paroi sous diverses incidences modérées (7° à 30°) puis par A. TAILLAND et J. MATHIEU (1967) /155/ dans le cas du jet pariétal, elle infirme toute relation du type (II-95) avec une viscosité turbulente apparente finie positive. Les études expérimentales de C. BEGUIER (1965) /156/ ont également mis en évidence la présence de production négative d'énergie turbulente dans l'intervalle compris entre les zéros des contraintes de cisaillement laminaire et turbulente. Cet effet apparaît aussi dans les écoulements en conduites dissymétriques comme le montrent l'article de K. MAUBACH et K. REHME (1972) /157/ et les travaux de K. HANJALIC et B.E. LAUNDER (1972) /158/ qui étudient l'écoulement entre plaques planes dont l'une est lisse et l'autre rugueuse. Ces derniers auteurs

montrent également qu'il n'y a pas coïncidence exacte des rayons auxquels se placent les minima des distributions de R_{11} , R_{22} et R_{33} .

Les résultats de transfert de chaleur à flux constant pour divers nombres de PRANDTL sont résumés dans le tableau suivant:

TABLEAU 9

Transfert de chaleur dans les espaces annulaires

$Re = 93000$ $g = 0,562$

Pr	0,0154	0,7	1	5,7	10	10^2	10^3
Nu_1	12,88	155,6	193,7	509,8	654,7	1430,0	2731,2
$Marg_1 \cdot 10^2$	0,847	0,268	0,233	0,108	0,0790	0,0172	0,00329

$Re = 101400$ $g = 0,0625$

Pr	0,0154	0,7	1	5,7	10	10^2	10^3
Nu_1	25,76	225,0	278,4	709,4	906,9	2025,2	4114,1
$Marg_1 \cdot 10^2$	1,91	0,336	0,318	0,142	0,109	0,0230	0,00469
Nu_2	14,91	163,6	203,9	520,7	661,8	1413,3	2672,7
$Marg_2 \cdot 10^2$	1,12	0,270	0,236	0,105	0,0765	0,0163	0,00308

$Re = 215000$ $g = 0,0625$

Pr	0,0154	0,7	1	5,7	10	10^2	10^3
Nu_1	34,01	386,7	483,3	1311,0	1718,9	4357,7	9239,8
$Marg_1 \cdot 10^2$	1,17	0,294	0,258	0,122	0,0916	0,0232	0,00492

Les prévisions du nombre de NUSSELT (fig. 51) dans les trois cas étudiés sont en accord avec les solutions expérimentales de transmission de la chaleur obtenues par W.M. KAYS et E.Y. LEUNG (1963) /161/ dans les conduites annulaires pour un fluide dont le nombre de PRANDTL moléculaire est égal à 0,7.

Les nombres de NUSSELT Nu_2 obtenus par le calcul dans le cas d'un transfert sur la paroi extérieure seule, la paroi intérieure étant isolée sont inférieurs à ceux Nu_1 obtenus lorsque la paroi intérieure est seule chauffée. Cet écart dû à la dissymétrie des courbes de répartition de la diffusivité turbulente dans l'espace annulaire apparaît d'autant plus important que le rapport g des rayons est plus faible /161/.

Les calculs numériques effectués dans chacune de ces deux conditions pour une valeur g égale à 0,0625 montrent effectivement un écart très sensible entre Nu_1 et Nu_2 (fig. 52).

Ces résultats font apparaître un avantage du modèle qui est de permettre la description du champ turbulent et du transfert de chaleur dû à l'agitation turbulente dans des configurations plus complexes d'écoulements que celles couramment décrites à l'aide d'une hypothèse de longueur de mélange.

b) Application du modèle simplifié.

A titre de comparaison, un des cas d'écoulement précédent a été repris à l'aide du modèle simple (II-4.1). Les valeurs moyennes obtenues sont proches de celles fournies par le modèle complet et peuvent fournir une première approximation.

TABLEAU 10

Écoulement dans un espace annulaire
(modèle simplifié)

Γ	g	Re	Pe
10^7	0,0625	113000	97000

$U_{* 2}$	$U_{* 1}$	U_{*}	$\lambda_{*} / 8$
2200	2658	2236	$0,289 \cdot 10^{-2}$

Malgré les légères différences notées dans la prévision du nombre de REYNOLDS, la position du maximum de vitesse est pratiquement la même que celle donnée par le modèle complet (fig. 53). Le décalage entre zéros des tensions turbulente et laminaire que cette version simplifiée ne peut mettre en évidence semble ne pas avoir d'influence marquée sur la prévision des quantités globales et sur l'allure générale des profils des grandeurs moyennes.

Tout comme, dans les tubes circulaires, on a constaté toutefois que la prévision du nombre de NUSSELT se détériore aux nombres de PRANDTL moléculaires moyens et élevés, le tableau 11 permet la comparaison.

TABLEAU 11

Transfert de chaleur dans les
espaces annulaires

Pr	0,0154	0,7	1	5,7	10	10^2	10^3
Nu_1 modèle complet Re 101400	25,76	225,0	278,4	709,4	906,9	2025,2	4114,1
Nu_1 modèle simplifié Re 113000	23,9	152,8	183,2	376,1	450,9	855,3	1590

CHAPITRE IV

ÉCOULEMENTS LIBRES TURBULENTS

Les écoulements libres qui ont fait l'objet de nombreuses études expérimentales offrent un domaine d'application important car ils présentent une structure très différente de celle des écoulements en conduite et permettent de tester l'universalité du modèle. Les jets et sillages turbulents ont un nombre de REYNOLDS de turbulence élevé tel que le rôle de la diffusion moléculaire sera presque toujours négligeable. Les frontières d'écoulements libres ont la particularité de présenter une interface irrégulière et instationnaire de fluide turbulent-non turbulent responsable du phénomène d'intermittence qui complique beaucoup la description du mouvement. Dans la présente étude en première approximation le phénomène d'intermittence ne sera pas explicitement pris en compte dans les équations.

IV-1 L'APPROCHE NUMÉRIQUE

IV-1.1 Transformation des équations générales.

On suppose dans les équations générales que les dérivées par rapport à la variable x_1 dans la direction principale de l'écoulement sont négligeables devant celles par rapport à x_2 dans le sens

transversal et que les contraintes de cisaillement, flux calorifique et flux de diffusion ne sont importants que dans la direction perpendiculaire au mouvement. On se place, bien sûr dans l'hypothèse où il n'y a pas d'écoulement de retour. Dans le cadre des approximations précédentes en écoulement stationnaire, les équations de transport à résoudre s'écrivent de manière générale :

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{1}{y^\epsilon} \frac{\partial}{\partial y} (y^\epsilon J) + S \quad (1)$$

avec les notations :

$u = v_1$	S terme source
$v = v_2$	ϕ nom générique de la fonction
$x = x_1$	$J = - \sigma \frac{\partial \phi}{\partial y}$ flux de diffusion
$y = x_2$	$\epsilon = 0$ dans le problème plan
	1 dans le problème axisymétrique

La méthode numérique de S.V. PATANKAR et D.B. SPALDING /166/ /167/ permet la résolution de systèmes aux dérivées partielles de ce type dont la forme est analogue aux équations de la couche limite. La principale originalité de la méthode réside dans le choix d'une grille variable dont l'écartement s'ajuste de manière à s'adapter à l'épaisseur de l'écoulement délimitant ainsi la zone dans laquelle existent des gradients importants. La méthode de calcul de la couche limite due à D. JEANDEL et J. MATHIEU /168/ /169/ est également basée sur une procédure de ce type.

La fonction de courant ψ est introduite par les relations de définition

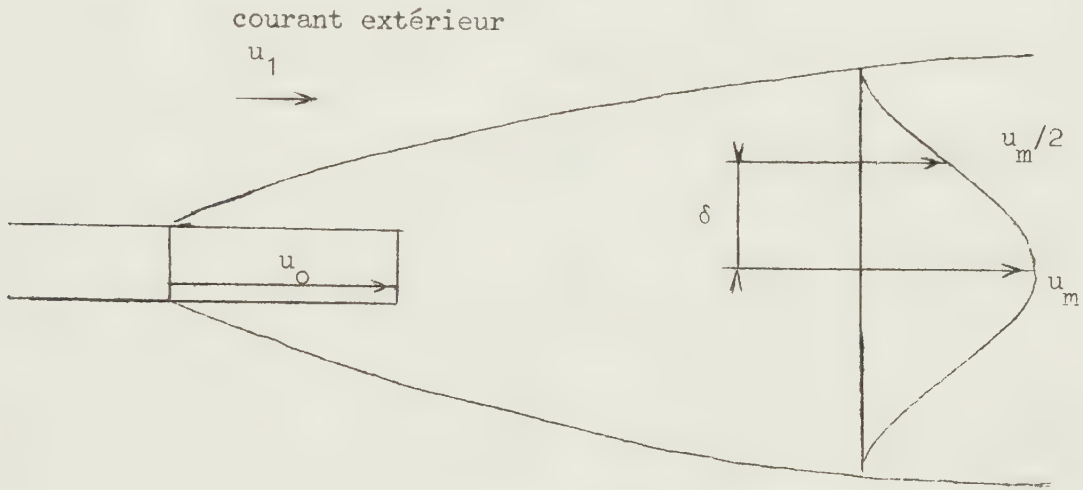
$$u y^\epsilon = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad - \quad v y^\epsilon = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Dans le plan (x, ψ) de Von MISES, l'équation générale (1) s'écrit

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial \psi} (y^\epsilon J) + \frac{S}{u} \quad (2)$$

avec $J = -u \sigma y^\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial \psi}$

Les équations du modèle ont été écrites de manière adimensionnelle en utilisant comme échelle de vitesse, la vitesse maximale dans la section initiale du jet $u_0 = u_1 + u_m(0)$ et comme échelle de longueur l'épaisseur initiale du jet $\delta_0 = \delta(0)$, $\delta(x)$ étant défini comme la distance à l'axe du point dont la vitesse moyenne est $u_m(x)/2$



Représentation schématique

Les groupements adimensionnels suivants ont ainsi été introduits dans la formulation du modèle

$$\begin{aligned} U &= \frac{u}{u_0} & R_{ij} &= \frac{R_{i,j}}{u_0^2} & \Omega &= \frac{\sigma}{u_0^2} & X &= \frac{x}{\delta_0} & Y &= \frac{y}{\delta_0} \\ L &= \frac{L}{\delta_0} & D &= \frac{v \delta_0}{u_0 s^2} & \tau &= \frac{v}{u_0 \delta_0} & T &= \frac{T}{T_0} & \Psi &= \frac{\psi}{u_0 \delta_0} \end{aligned} \quad (3)$$

Les équations de transport s'écrivent chacune sous une forme analogue à (2)

$$\frac{\partial U}{\partial X} = - \frac{\partial}{\partial \Psi} (H R_{12}) + \tau \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(H \frac{\partial U}{\partial \Psi} \right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{11}}{\partial X} = & -2 \left(1 - \frac{2}{3} \alpha f + \frac{1}{3} \chi f\right) R_{12} Y^\epsilon \frac{\partial U}{\partial \Psi} - D \frac{R_{11}}{U} \\ & + A_1 \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(G \frac{\partial R_{11}}{\partial \Psi}\right) - \frac{\zeta f \sqrt{Q}}{2 U L} \left(R_{11} - \frac{2}{3} Q\right) \\ & + T \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(H \frac{\partial R_{11}}{\partial \Psi}\right) + \frac{2}{3} \eta H T \frac{R_{22}}{Q^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial \Psi}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{22}}{\partial X} = & -2 \left(-\frac{1}{3} \alpha f - \frac{2}{3} \chi f\right) R_{12} Y^\epsilon \frac{\partial U}{\partial \Psi} - D \frac{R_{22}}{U} \\ & + 3 A_1 \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(G \frac{\partial R_{22}}{\partial \Psi}\right) + 2 A_1 \epsilon \frac{L \sqrt{Q}}{U} \left(2 \frac{R_{33} - R_{22}}{Y^2} - U \frac{\partial R_{33}}{\partial \Psi}\right) \\ & + 2 B_1 \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(G \frac{\partial Q}{\partial \Psi}\right) - \frac{\zeta f \sqrt{Q}}{2 U L} \left(R_{22} - \frac{2}{3} Q\right) \\ & + T \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(H \frac{\partial R_{22}}{\partial \Psi}\right) - 2 \epsilon \frac{R_{22} - R_{33}}{Y^2} - \frac{4}{3} \eta H T \frac{R_{22}}{Q^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial \Psi}\right)^2\end{aligned}$$

$$\frac{\partial R_{33}}{\partial X} = -2 \left(-\frac{1}{3} \alpha f + \frac{1}{3} \chi f\right) R_{12} Y^\epsilon \frac{\partial U}{\partial \Psi} - D \frac{R_{33}}{U} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}& + A_1 \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(G \frac{\partial R_{33}}{\partial \Psi}\right) + 2 A_1 \epsilon \left\{ Y \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(L \sqrt{Q} \frac{R_{22} - R_{33}}{Y} \right) \right. \\ & \left. + L \sqrt{Q} \frac{\partial R_{33}}{\partial \Psi} \right\} + 6 A_1 \epsilon L \sqrt{Q} \frac{R_{22} - R_{33}}{Y^2} \\ & + 2 B_1 \epsilon L \sqrt{Q} \frac{\partial Q}{\partial \Psi} - \frac{\zeta f \sqrt{Q}}{2 U L} \left(R_{33} - \frac{2}{3} Q\right) \\ & + T \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(H \frac{\partial R_{33}}{\partial \Psi}\right) + 2 \epsilon \frac{R_{22} - R_{33}}{U Y^2} + \frac{2}{3} \eta H T \frac{R_{22}}{Q^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial \Psi}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{12}}{\partial X} = & - (1 - \alpha f) P_{22} Y^\varepsilon \frac{\partial U}{\partial \Psi} + \chi f P_{11} Y^\varepsilon \frac{\partial U}{\partial \Psi} \\ & - \gamma f Y^\varepsilon \frac{\partial U}{\partial \Psi} - D \frac{R_{12}}{U} - \frac{\zeta f \sqrt{Q}}{2 U L} R_{12} \\ & + 2 A_1 \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(G \frac{\partial R_{12}}{\partial \Psi} \right) - 2 A_1 \varepsilon \frac{L \sqrt{Q}}{U} \frac{P_{12}}{Y^2} \\ & + T \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(H \frac{\partial R_{12}}{\partial \Psi} \right) - \frac{\varepsilon R_{12}}{U Y^2} - \eta H T \frac{R_{12}}{Q^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial \Psi} \right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial X} = & - \omega D \frac{R_{12}}{Q} Y^\varepsilon \frac{\partial U}{\partial \Psi} + A_S \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(G \frac{\partial D}{\partial \Psi} \right) \\ & + \frac{A_{sq}}{G} \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(G \frac{\partial Q}{\partial \Psi} \right) + a T \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(H \frac{\partial D}{\partial \Psi} \right) - \frac{\Delta D^2}{U}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial X} = & \beta \frac{\sqrt{Q}}{U} + A_L \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(G \frac{\partial L}{\partial \Psi} \right) - \beta \frac{DL}{U} \\ & + b T \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(H \frac{\partial L}{\partial \Psi} \right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial X} = A_t \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(H \frac{Q}{D} \frac{\partial T}{\partial \Psi} \right) + \frac{T}{Pr} \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(H \frac{\partial T}{\partial \Psi} \right)$$

avec $H = U Y^{2\varepsilon}$ et $G = H L \sqrt{Q}$

Les mêmes valeurs des constantes numériques que précédemment sont conservées dans les équations de base.

Une fonction de courant réduite sans dimension est ensuite définie par

$$\Omega = \frac{\Psi - \Psi_I}{\Psi_E - \Psi_I} \quad 0 \leq \Omega \leq 1 \quad (5)$$

Ψ_I et Ψ_E représentant les valeurs prises par Ψ à chacune des deux frontières notées I et E de l'écoulement. Exprimée à l'aide des variables X et Ω l'équation générale (2) s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\Psi'_I + \Omega (\Psi'_E - \Psi'_I)}{\Delta \Psi} \frac{\partial \phi}{\partial \Omega} + \frac{\partial}{\partial \Omega} \left(\frac{U Y^{2\epsilon_\sigma}}{\Delta \Psi^2} \frac{\partial \phi}{\partial \Omega} \right) + \frac{S}{U} \quad (6)$$

$$\Delta \Psi = \Psi_E - \Psi_I$$

$$\Psi'_I = d \Psi_I / d X = m_I Y_I^\epsilon$$

$$\Psi'_E = d \Psi_E / d X = m_E Y_E^\epsilon$$

m_I et m_E vitesses de transfert à la frontière

L'équation résultante est donc de type parabolique

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} + (a + b \Omega) \frac{\partial \phi}{\partial \Omega} = \frac{\partial}{\partial \Omega} \left(c \frac{\partial \phi}{\partial \Omega} \right) + d \quad (7)$$

$$a = \frac{m_I Y_I^\epsilon}{\Delta \Psi}$$

$$b = \frac{m_E Y_E^\epsilon - m_I Y_I^\epsilon}{\Delta \Psi}$$

$$c = \frac{U Y^{2\epsilon_\sigma}}{\Delta \Psi^2}$$

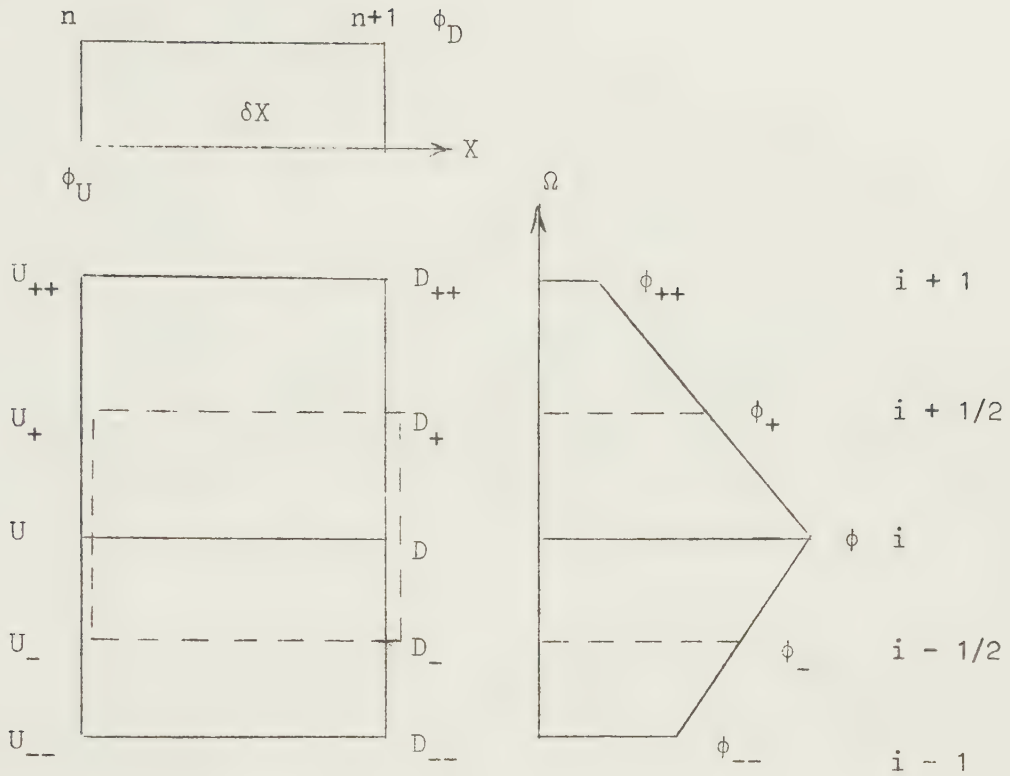
$$d = \frac{S}{U}$$

Chaque équation du système (4) pourra être mise sous une forme commune (7)

IV-1.2 Méthode numérique de résolution.

a) Discretisation des équations.

Les équations sont mises sous forme de différences finies par le procédé de la microintégrale préconisé par S.V. PATANKAR et D.B. SPALDING, qui a l'avantage de donner une formulation conservative sur tout le domaine.



Maille de discrétisation

L'équation (7) est intégrée sur le domaine rectangulaire figuré en pointillés en supposant que la fonction ϕ varie linéairement entre les points de discrétisation.

$$P \left(\int_{-}^{+} \phi d\Omega - \int_{-}^{+} \phi_U d\Omega \right) + (C_+ \phi_+ - C_- \phi_-) + G \int_{-}^{+} \phi d\Omega$$

$$= \{T_+ (\phi_{++} - \phi) - T_- (\phi - \phi_{--})\} + S \quad (8)$$

$$P = \Delta \Psi / \delta X$$

$$G = \Delta \Psi'$$

$$C_+ = (a + b \Omega_+) \Delta \Psi$$

$$C_- = (a + b \Omega_-) \Delta \Psi$$

$$T_+ = \frac{c_+}{\Omega_{++} - \Omega} \Delta \Psi = \frac{(Y^E \sigma)_+}{Y_{++} - Y}$$

$$T_- = \frac{c_-}{\Omega - \Omega_{--}} \Delta \Psi = \frac{(Y^E \sigma)_-}{Y - Y_{--}}$$

$$S = \Delta \Psi \int_{-}^{+} d. d\Omega$$

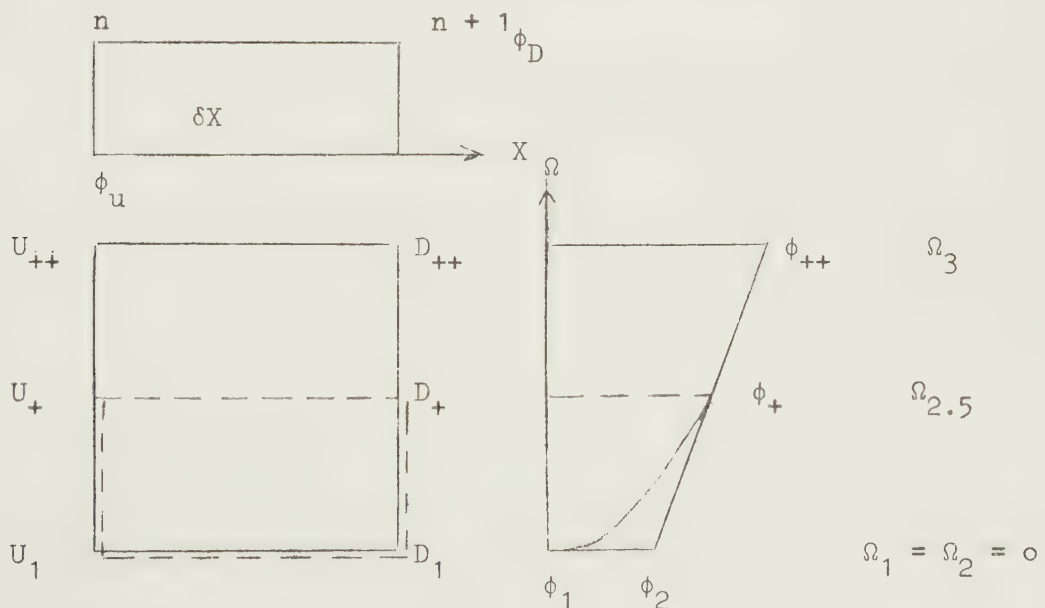
$$\int_{-}^{+} \phi d\Omega = \frac{1}{8} \{ \phi_{++} (\Omega_{++} - \Omega) + 3 \phi (\Omega_{++} - \Omega_{--}) + \phi_{--} (\Omega - \Omega_{--}) \}$$

Lorsque la fonction ϕ apparaît explicitement sous forme linéaire dans le terme source, ce dernier sera écrit $S = \Sigma_U + \Sigma_D \phi_D$ de manière à obtenir un schéma de meilleure stabilité numérique. L'équation générique (7), une fois discrétisée pourra se mettre sous la forme

$$\phi = A \phi_{++} + B \phi_{--} + C \quad (9)$$

La discrétisation de l'équation aux frontières est menée de façon particulière. L'exemple est donné pour la frontière I, le schéma est identique pour la frontière E.

Un point ϕ_2 fictif est introduit tel que la fonction linéaire définie par les points ϕ_2 et ϕ_3 fournisse une dérivée correcte au point $\phi_+ = \phi_{2,5}$ intermédiaire.



Maille de discrétisation à la frontière I

L'équation aux dérivées partielles, intégrée sur le contour pointillé s'écrit :

$$P \left(\int_1^+ \phi d\Omega - \int_1^+ \phi_U d\Omega \right) + (C_+ \phi_+ - C_1 \phi_1) + E \int_1^+ \phi d\Omega$$

$$= \{T_+ (\phi_{++} - \phi_2) - T_1 (\phi_{2.5} - \phi_1)\} + S \quad (10)$$

$$C_+ = (a + b \Omega_{2.5}) \Delta \Psi$$

$$C_1 = (a + b \Omega_1) \Delta \Psi$$

$$T_+ = \frac{c_+}{\Omega_{++} - \Omega} \Delta \Psi = \frac{(Y^E \sigma)_{2.5}}{Y_3 - Y_2}$$

$$T_1 = \frac{2 (Y^E \sigma)_1}{Y_2 + Y_3 - 2Y_1}$$

$$S = \int_1^+ \Delta \Psi d. d\Omega$$

$$\int_1^+ \phi d\Omega = \frac{1}{8} (3 \phi_2 + \phi_3) (\Omega_{++} - \Omega_1)$$

Une fois discrétisée, l'équation se mettra sous la forme

$$\phi_2 = A_2 \phi_3 + B_2 \phi_1 + C_2 \quad (11)$$

Une relation analogue est obtenue à la frontière E

$$\phi_{N+2} = A_{N+2} \phi_{N+3} + B_{N+2} \phi_{N+1} + C_{N+2} \quad (12)$$

b) Procédé de résolution.

La méthode itérative décrite au § III-1.2 peut dès lors être utilisée.

Les conditions aux limites sont introduites à chaque frontière sur les équations (11) et (12). Dans le cas d'une condition de type Dirichlet, ϕ_1 est fixé à la valeur imposée ϕ_I et dans le cas d'une condition de type Von Neumann, le flux de diffusion J de la

grandeur ϕ est imposé en I par

$$J_1 = \frac{2 \sigma_1}{Y_2 + Y_3 - 2Y_1} \left\{ \phi_1 - \frac{1}{2} (\phi_2 + \phi_3) \right\}$$

Le calcul de l'ordonnée Y se fait à partir de la relation

$$Y^E dY = \Delta\Psi \frac{d\Omega}{U} \quad (13)$$

Pratiquement, on calcule dans chaque cas et en tout point l'intégrale

$$I_\Omega = \Delta\Psi \int_0^\Omega \frac{d\Omega}{U}$$

l'ordonnée est ensuite obtenue par $Y = I_\Omega$ dans le cas plan et par $Y = \sqrt{2 I_\Omega}$ dans le cas axisymétrique.

Le calcul de $\Delta\Psi$ est effectué par une relation itérative explicite :

$$\Delta\Psi_D = \Delta\Psi_U + \Delta\Psi'_U \cdot \delta X$$

$\Delta\Psi'_U$ étant obtenu à partir de la valeur de l'entraînement à chaque frontière : $\Delta\Psi'_U = \Psi'_E - \Psi'_I$

$$\Psi'_I = Y_I^E m_I \quad \Psi'_E = Y_E^E m_E$$

La formule d'entraînement utilisée, qui permet le contrôle de la grille, est déduite d'une forme approchée de l'équation du mouvement.

$$m_1 = \frac{2T Y_{2.5}^E}{(Y_3 - Y_2) Y_I^E} - \frac{Y_3^E (R_{12})_3 - Y_2^E (R_{12})_2}{U_3 - U_2} \quad (14)$$

et une formule analogue pour m_E

Dans le cadre du modèle simplifié qui fait intervenir la viscosité turbulente l'expression retenue se réduit à

$$m_I = \frac{2 (T + \epsilon_{t2.5}) Y_{2.5}^E}{(Y_3 - Y_2) Y_I^E} \quad (15)$$

Le contrôle de la grille peut être effectué à partir de fonctions autres que la vitesse, et en particulier la température

$$m_{TI} = \frac{2 (T/Pr + D_{t2.5}) Y_{2.5}^e}{(Y_3 - Y_2) Y_I^e} \quad (16)$$

Afin de décrire des écoulements dans lesquels l'épaisseur de couche limite thermique peut éventuellement dépasser celle de la couche limite dynamique, la vitesse d'entraînement a été choisie comme $\sup (m_I, m_{TI})$.

Le pas d'intégration est généralement choisi proportionnel à l'épaisseur du jet

$$\delta X = X_D - X_U = C (Y_E - Y_I) \quad (17)$$

$C \approx 0,1$ dans le modèle simplifié

et $C \approx 0,02$ dans le modèle complet

δX est cependant limité de manière à ce que la quantité de fluide entraînée à chaque pas ne dépasse pas une fraction définie de la quantité de fluide déjà contenue dans l'écoulement

$$\delta X < \frac{C_L \Delta \Psi}{\Delta \Psi'} \quad (18)$$

$$C_L \approx 0,1 C$$

Dans les calculs de jets libres, le nombre de points de discrétisation sur la demi-épaisseur de l'écoulement, a été choisi égal à environ 80. Cette valeur assure une précision suffisante, vérification faite que l'augmentation du nombre de points à 120 ne modifie les résultats que de quelques centièmes en valeur relative. Les calculs ont été répétés avec différentes valeurs du pas de progression δX et avec plusieurs découpages initiaux de la grille transversale afin de vérifier que les solutions numériques ne sont pas affectées par ces quantités. Un calcul de jet libre effectué dans le cadre du modèle simplifié nécessite environ 20 s sur calculateur CDC 7600, le temps de calcul est porté à environ 80 s pour le modèle complet.

IV-2 ETUDE AEROTHERMIQUE DES JETS LIBRES TURBULENTS.

La méthode de calcul précédente a été appliquée dans le cadre du modèle à des cas fondamentaux classiques d'écoulements libres, jets plans, zone de mélange.

Ces écoulements ont la particularité commune de présenter des profils ayant un caractère de similitude qui se développent après une région initiale d'organisation de l'écoulement.

Plusieurs cas de similitude plane /13/ sont possibles.

1°) $u_m \gg u_1$ c'est le cas du jet plan turbulent dans une ambiance au repos, $\delta \sim x$ et $u_m \sim 1/\sqrt{x}$

2°) $u_m \ll u_1$ c'est le cas d'un jet plan évoluant dans une atmosphère de vitesse voisine de celle du jet, c'est aussi le cas du sillage bi-dimensionnel derrière un obstacle, $\delta \sim \sqrt{x}$ et $u_m \sim 1/\sqrt{x}$

3°) $u_1 = C_{te}$, $u_m = C_{te}$ c'est le cas de la zone de mélange du jet plan $\delta \sim x$

Un écoulement type correspondant à chacun des cas de similitude a été étudié.

Les conditions aux limites posées à la frontière d'un écoulement libre évoluant dans une ambiance au repos ou animée d'une vitesse uniforme U_1 sont données par :

$$\begin{array}{lll} U = U_1 & Q = 0 & R_{ij} = 0 \\ D = 0 & d_L = 0 & T = 0 \end{array} \quad (19)$$

Par la condition $Q = 0$, on suppose le fluide extérieur non turbulent. La condition $D = 0$ sur la microéchelle correspond à la limite ultime de la décroissance de la turbulence derrière une grille, par exemple.

Les expériences dans les jets libres /170/, /173/ montrent que l'échelle intégrale de corrélation ne s'annule pas à la frontière et qu'elle varie peu dans une même section, fait qui explique par ailleurs le succès des théories de longueur de mélange dans ces cas. La condition $d_L = 0$ semble ainsi la plus appropriée, elle fournit en outre $\sqrt{q} \approx \frac{uL}{s^2}$ sur la frontière.

IV-2.1 Jet plan turbulent dans une atmosphère immobile.

a) Application du modèle simplifié.

Les calculs numériques effectués à partir de conditions initiales faiblement turbulentes et des distributions de vitesse et de température carrées, ont montré que la zone de similitude des profils est pratiquement atteinte dès $x/\delta_0 = 80$. C'est dans cette zone de similitude que sont effectuées les comparaisons avec les résultats expérimentaux de L.J.S. BRADBURY (1965) /170/ (fig. 54 à 56).

Le profil de vitesse moyenne est trouvé en bon accord avec celui donné par l'expérience et le taux calculé d'élargissement du jet voisin de $d\delta/dx = 0,12$ est proche de la valeur expérimentale 0,109 obtenue par L.J.S. BRADBURY. Les courbes d'énergie turbulente et de contrainte de cisaillement turbulent sont également trouvées en accord avec l'expérience, en particulier on note la correspondance des positions des maxima et de leurs valeurs relatives.

La distribution de température dans la section du jet est comparée aux valeurs mesurées tirées de l'article de B.G. VAN DER HEGGE ZIGGEN (1958) /172/ sur la figure 55 qui montre une bonne concordance. Il est également remarquable que le rapport D_t/u_t inverse du nombre de PRANDTL turbulent est retrouvé voisin de 2 conformément aux résultats expérimentaux /172/ alors que le modèle fournit D_t/u_t voisin de 1 dans la région centrale des conduites.

La figure 56 donne la distribution des échelles de turbulence dans le jet. Afin de comparer les valeurs de l'échelle λ avec les

résultats d'origine expérimentale sur la microéchelle de turbulence, la courbe $\lambda = \sqrt{10} \lambda$ a été tracée qui se trouve assez proche de celle obtenue par L.J.S. BRADBURY. Aucune comparaison expérimentale n'est donnée pour l'échelle L, on remarque cependant que l'allure générale de la courbe est celle de l'échelle intégrale de corrélation.

b) Application du modèle complet.

Dans la zone de similitude des résultats analogues aux précédents sont obtenus à l'aide du modèle complet, sur le taux d'élargissement, les distributions de vitesses moyennes et températures moyennes (fig. 57). En particulier, le nombre de PRANDTL turbulent défini par

$$\frac{\nu_t}{D_t} = - \frac{R_{12}}{D_t \frac{\partial u}{\partial y}}$$

est retrouvé voisin de 0,5 et la courbe représentative de $1/Pr_t$ présente comme celle de B.G. VAN DER HEGGE ZIJNEN un maximum marqué pour $y/\delta \approx 1$. Le nombre sans dimension D_t/ϵ_t qui conserve toujours une signification générale est donné à titre de comparaison.

Les courbes représentatives des corrélations doubles de vitesse (fig. 58) qui permettent la description du champ turbulent présentent les principales caractéristiques des profils expérimentaux. La corrélation R_{11} qui atteint des valeurs supérieures aux autres corrélations présente un pic accusé pour $y/\delta \approx 0,7$ également fourni par l'expérience, on retrouve également pour la corrélation R_{33} dont le niveau est plus faible un maximum moins prononcé et davantage rapproché de l'axe tandis que la courbe représentative de la corrélation R_{22} présente une forme plus aplatie. Les valeurs sur l'axe des corrélations doubles, assez différentes entre elles dans les expériences de L.J.S. BRADBURY semblent ne pas présenter dans les résultats du calcul un étalement suffisant. En réalité une certaine incertitude expérimentale est inévitable et c'est ainsi que l'étagement des courbes expérimentales des corrélations doubles données par A. ROBINS /61/ a été trouvé différent.

Le bilan d'énergie turbulente (fig. 59) malgré quelques écarts sur les termes de dissipation et de convection reste en bon accord avec

celui obtenu par L.J.S. BRADBURY.

Les figures 60 à 63 sont relatives à l'évolution du jet dans sa région initiale depuis l'embouchure jusqu'au début de la zone de similitude, traitée dans le cadre du modèle complet. L'épaisseur δ du jet donnée en fonction de la distance x à l'embouchure, montre une croissance asymptotique rapide et dès $x/\delta_0 \approx 30$ les points du calcul s'alignent sur une droite de pente $d\delta/dx = 0,12$. La même évolution obtenue par voie expérimentale est constatée dans les résultats de D.R. MILLER et E.W. COMINGS (1957) /171/.

L'augmentation de l'intensité de turbulence est représentée par l'évolution de la corrélation R_{11} (fig. 61). Les calculs ont été effectués à partir d'un niveau initial de turbulence faible, R_{11}/u_m^2 étant voisin de $5 \cdot 10^{-3}$ à l'embouchure. Le faisceau des courbes représentatives de R_{11} obtenues à diverses distances de l'embouchure est qualitativement comparable à celui expérimental de D.R. MILLER et E.W. COMINGS /171/, en particulier on remarque que la position du maximum des courbes de R_{11}/u_m^2 se rapproche progressivement de l'axe et que la hauteur du pic relativement à la valeur axiale diminue à mesure que l'on s'éloigne de l'embouchure.

Les figures 62 et 63 illustrent l'évolution des profils de vitesse et de température moyennes dans la région initiale.

IV-2.2 Jet plan turbulent dans une atmosphère en mouvement.

Le cas du jet plan turbulent évoluant dans une atmosphère de vitesse uniforme $U_1 \neq 0$ a été étudié expérimentalement par L.J.S. BRADBURY et J. RILEY (1967) /174/. Une caractéristique importante de cet écoulement, donnée par l'analyse dimensionnelle, est qu'il peut présenter deux zones de similitude. Lorsque la vitesse du jet est grande devant celle du courant extérieur, une première région de similitude est possible dans laquelle $\delta \sim x$ et $u_m \sim x^{-1/2}$. Une deuxième zone de similitude ne se produit que très loin de l'embouchure lorsque la vitesse du jet approche celle du courant extérieur, dans cette

région $\delta \sim x^{1/2}$ et $u_1 - u_m \sim x^{-1/2}$.

Le paramètre caractéristique important est l'épaisseur de quantité de mouvement

$$\theta_* = \frac{M}{\rho u_1^2} \quad (20)$$

avec
$$M = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} u (u - u_1) dy$$

Le profil initial de vitesse étant choisi carré, il existe une relation de proportionnalité simple entre δ_0 et θ_* :

$$\frac{\theta_*}{\delta_0} = 2 \frac{1 - \frac{u_1}{u_0}}{\left(\frac{u_1}{u_0}\right)} \quad (21)$$

Les figures 64 et 65 représentent en fonction de x/θ_* l'évolution de l'épaisseur δ/θ_* et de la quantité $(u_1/u_m)^2$ calculées à l'aide du modèle simplifié pour deux valeurs du rapport u_1/u_0 de la vitesse du courant extérieur à la vitesse du jet à l'embouchure ($u_1/u_0 = 0,36$ et $0,50$). Dans cette représentation les courbes correspondant aux diverses valeurs du rapport u_1/u_0 se trouvent être pratiquement identiques et pourraient être superposées, moyennant éventuellement un changement d'origine. Ce même résultat est obtenu dans l'étude expérimentale de L.J.S. BRADBURY et J. RILEY.

La théorie de G.N. ABRAMOVICH /1/ basée sur l'hypothèse de longueur de mélange conduit à la relation

$$\frac{d\delta}{dx} = \pm C^{te} \frac{u_m - u_1}{u_m + u_1} \quad (22)$$

$$(C^{te} \approx 0,11)$$

valable dans la région de similitude proche de l'embouchure. Pour $u_m = u_0$ la formule (22) fournit les valeurs de $\left(\frac{d\delta}{dx}\right)_0$ dans la section initiale.

u_1/u_0	0,36	0,50
$(d\delta/dx)_0$	0,052	0,037

L'élargissement du jet se trouve ainsi inférieur à celui d'un jet évoluant dans une atmosphère au repos, ce qui est retrouvé sur les courbes calculées.

IV-2.3 Zone de mélange.

Le troisième type d'écoulement étudié est la zone de mélange du jet plan, seul cas ne présentant pas de symétrie. Les calculs ont été effectués à l'aide du modèle simplifié et la figure 66 montre les résultats de la dynamique et leur comparaison avec les mesures expérimentales de I. WYGNANSKI et H.E. FIEDLER (1970) /175/ et M. SUNYACH et J. MATHIEU (1969) /176/.

L'épaisseur δ est définie cette fois par la distance entre les points dont la vitesse est égale à 10 % et 90 % de la vitesse du courant principal. L'élargissement de la zone de mélange a été trouvée voisine de $d\delta/dx = 0,12$, valeur un peu inférieure à celles fournies par les expériences qui présentent cependant une certaine dispersion, les élargissements mesurés allant de 0,12 à 0,20 suivant les conditions expérimentales /79/. Si les courbes de vitesse, énergie turbulente et tension de cisaillement turbulent montrent un assez bon accord général avec l'expérience, on remarque cependant une chute apparemment trop brutale de l'énergie et de la vitesse moyenne pour $y/\delta < 0,3$. En réalité, le courant intérieur de vitesse uniforme u_0 n'est jamais parfaitement laminaire, comme le suppose le calcul, mais une faible turbulence contribue à une diffusion plus importante d'énergie turbulente, un étalement plus grand du profil de vitesse et par suite un élargissement plus important, ce qui peut expliquer en partie les écarts constatés à la frontière intérieure. Une deuxième cause d'erreur peut être due au phénomène d'intermittence, particulièrement marqué sur la frontière intérieure /176/ et dont il n'a pas été tenu compte dans les calculs.

Les résultats du transfert de chaleur entre le jet chaud et une atmosphère de température différente (fig. 67) montrent que la zone de mélange thermique s'étend davantage que la zone de mélange dynamique. Le nombre de PRANDTL turbulent est également trouvé voisin de 0,5.

IV-3 SILLAGES TURBULENTS DERRIERE UN OBSTACLE.

Tout comme le jet libre évoluant dans un courant extérieur de vitesse uniforme (étudié au § IV-2.2), le sillage turbulent lointain derrière un obstacle peut atteindre, à des distances suffisamment grandes, une zone de similitude approchée dont la structure et le développement sont indépendants des conditions initiales précises et de la forme de l'obstacle.

La plupart des études expérimentales portent sur le sillage turbulent derrière un cylindre. Dans le cas général d'un obstacle quelconque, le diamètre d du cylindre équivalent produisant le même sillage lointain que l'obstacle considéré est obtenu par application du théorème de quantité de mouvement à un contour rectangulaire entourant l'obstacle

$$T = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} u (u_1 - u) dy \quad (23)$$

$T = \frac{1}{2} C_T \rho u_1^2 d$ étant la trainée par unité de longueur

$$d = \frac{2}{C_T} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) dy \quad (24)$$

(on admet $C_T \approx 1$ pour $10^3 < \frac{u_1 d}{\nu} < 3 \cdot 10^5$)

IV-3. 1 Dynamique et transfert thermique dans le sillage lointain

a) Application du modèle simplifié.

Les calculs sur ordinateur ont été effectués à partir de conditions initiales faiblement turbulentes et un profil rec-

tangulaire de vitesse déficitaire et de température moyennes. La zone de similitude des profils n'est atteinte que pour des distances très supérieures à celles nécessaires dans les jets libres, de l'ordre de 10^3 diamètres équivalents. C'est dans cette zone de similitude approchée que sont effectuées les comparaisons (fig. 68 et 69) avec les résultats expérimentaux de A.A. TOWNSEND (1949) /178/ sur le sillage turbulent pleinement développé derrière un cylindre à des distances supérieures à 500 diamètres.

Les profils de vitesse et de température moyennes calculés sont moins étalés que ceux mesurés par A.A. TOWNSEND l'écart étant surtout sensible près des frontières. L'explication semble, dans ce cas aussi, devoir être rattachée au phénomène d'intermittence dont on sait toute l'importance dans les sillages turbulents. Les calculs numériques traités sur la base d'équations stationnaires négligent le caractère fluctuant du front laminaire-turbulent, région dans laquelle les structures de grande échelle jouent un rôle important.

b) Application du modèle complet.

Les mêmes remarques qu'en a) s'appliquent aux prévisions numériques de vitesse et température moyennes obtenues à l'aide du modèle complet (fig. 70). Les prévisions des corrélations doubles (fig. 71) sont assez bien vérifiées par l'expérience, la corrélation R_{11} entre composantes longitudinales des vitesses fluctuantes a été retrouvée supérieure aux deux autres corrélations R_{22} et R_{33} , cependant, il n'a pas été obtenu pour cette dernière de maximum extérieur à l'axe. Les courbes de corrélations triples de vitesse $T_{112} = \overline{v'_1 v'_1 v'_2}$, $T_{222} = \overline{v'_2 v'_2 v'_2}$ et $T_{332} = \overline{v'_3 v'_3 v'_2}$ (fig. 73) présentent les mêmes variations que celles données par l'expérience, en particulier T_{112} présente un minimum négatif près de l'axe et un maximum positif vers l'extérieur tandis que T_{222} reste toujours positif dans le demi-plan $y/\delta > 0$. Cette bonne correspondance qualitative plaide en faveur de l'équation de comportement (II-7) reliant les corrélations triples aux corrélations doubles.

IV-3.2 Effet de la préturbulence du courant extérieur.

Le modèle permet d'introduire des conditions aux limites plus complexes que celles utilisées dans les calculs précédents et qui font intervenir le champ turbulent lui-même. Afin d'illustrer cette possibilité, l'influence de la turbulence du courant extérieur sur le développement d'un sillage a été étudiée dans le cadre de la version simplifiée du modèle.

Les conditions aux limites imposées à la frontière libre sont données par les relations :

$$\begin{aligned} U &= U_1 & \frac{dQ}{dt} &= -DQ \\ \frac{dD}{dt} &= -\Delta D^2 & \frac{dL}{dt} &= \beta \sqrt{Q} - \beta DL \end{aligned} \quad (25)$$

Les relations (25) ne sont autres que les formes limites des équations de transport dans un écoulement uniforme telles qu'elles décrivent par exemple la décroissance de la turbulence derrière une grille.

L'attention a été portée sur l'élargissement du sillage et la décroissance de la vitesse déficitaire axiale. Deux valeurs de la préturbulence initiale du courant extérieur ont été utilisées et les résultats comparés au développement du sillage sans turbulence extérieure. Les courbes présentées sur les figures 74 et 75 correspondent aux différentes valeurs de q_{ext}/u_0^2 imposées en $x = 0$

courbes 1	$q_{ext}/u_0^2 = 0$
courbes 2	$q_{ext}/u_0^2 = 0,25 \cdot 10^{-3}$
courbes 3	$q_{ext}/u_0^2 = 10^{-3}$

On obtient dans tous les cas, pour la zone de similitude $\frac{\delta}{d} \sim \sqrt{\frac{x}{d}}$ et $\frac{u_1}{u_{dm}} \sim \sqrt{\frac{x}{d}}$ mais il apparaît nettement que la préturbulence du courant provoque un élargissement plus important du sillage et corrélativement une diminution plus rapide de la vitesse déficitaire axiale.

CONCLUSION

Un modèle différentiel de turbulence constitué par un ensemble d'équations de transport des corrélations de REYNOLDS et des échelles efficaces de turbulence a été construit à partir d'un traitement statistique des équations de NAVIER-STOKES. Le caractère tensoriel des équations locales leur assure une signification intrinsèque indépendante de la géométrie particulière de l'écoulement. L'utilisation de deux échelles de turbulence et l'idée de les rattacher par des lois distinctes au transfert de la quantité de mouvement et au transfert de la chaleur ou de la masse a permis de différencier les deux mécanismes. Le transfert de chaleur peut ainsi être évalué dans toutes les configurations sans hypothèse posée a priori sur la valeur du nombre de PRANDTL turbulent. La version originale du modèle permet, outre l'obtention des distributions de vitesse et de température ou concentration, une description assez détaillée du champ de turbulence à l'aide de toutes les corrélations doubles de vitesse. Le cas des écoulements bidimensionnels cisailés, de grande importance pratique, a pu être traité à l'aide de versions simplifiées basées sur l'équation de l'énergie cinétique de turbulence obtenue par contraction des équations des corrélations doubles. Ces versions simplifiées permettent une première approche descriptive de l'écoulement turbulent traitée dans le cadre d'une procédure numérique allégée et un coût de calcul réduit. Dans tous les cas les mêmes constantes numériques une fois déterminées à partir de configurations simples d'écoulements turbulents classiques, ont été conservées dans l'ensemble des applications ultérieures.

Les premières exploitations numériques ont porté sur les écoulements turbulents en conduite rectangulaire et circulaire avec transfert de chaleur et un bon accord avec l'expérience a été obtenu sur une plage assez étendue de nombres de REYNOLDS et de nombres de

PRANDTL moléculaires. Le schéma proposé permet de décrire les zones à faible niveau de turbulence proche des parois ; les calculs étant conduits jusqu'à la paroi même, tout raccordement à la loi logarithmique se trouve ainsi évité. D'autre part, la prévision numérique du phénomène de transition laminaire-turbulent dans les conduites a pu être étudiée à l'aide du modèle. Le cas, également traité des écoulements turbulents dans les espaces annulaires a conduit à des résultats numériques conformes aux études expérimentales et en particulier le décalage entre les positions des zéros des contraintes laminaire et turbulente déjà mis en évidence par voie expérimentale a pu être retrouvé par le calcul.

Les études numériques relatives aux écoulements libres turbulents classiques tels que jet plan turbulent, zone de mélange bidimensionnelle, sillage derrière un obstacle ont fourni des résultats assez bien corroborés par l'expérience. De plus la formulation du modèle se prête aisément à l'introduction de conditions aux limites variées qui font intervenir la turbulence du courant extérieur, rendant possible l'étude de l'influence de cette dernière sur le développement de l'écoulement. Du point de vue thermique, le nombre de PRANDTL turbulent fourni par le calcul se situe autour de $1/2$, conformément aux expériences dans les écoulements libres, alors qu'il était retrouvé voisin de l'unité dans la région centrale des conduites où se vérifie l'analogie de REYNOLDS en première approximation. La méthode de calcul semble cependant présenter dans certains cas d'écoulements libres quelque faiblesse dans la prévision des niveaux de turbulence et de taux d'élargissement, ce fait a été particulièrement sensible sur le calcul du jet circulaire qui fournit un élargissement supérieur à celui expérimentalement constaté. Les écoulements avec frontière libre présentent un front laminaire-turbulent hautement instationnaire responsable du phénomène d'intermittence dont l'influence n'a pas été prise en compte dans les équations et il est significatif que ce sont précisément les écoulements libres et en particulier la région des frontières qui semble être la moins bien décrite.

La variété des sujets abordés et les aspects positifs des résultats obtenus permettent de penser qu'une voie est possible dans

la description générale des écoulements turbulents à l'aide d'équations de transport du type proposé et des voies d'extension peuvent dès à présent être tracées. Dans le cadre des écoulements confinés, le calcul des écoulements turbulents dans les conduites de section quelconque peut être envisagé moyennant un coût éventuellement plus élevé de la résolution numérique ; le transfert de chaleur associé peut être également traité avec des conditions aux limites quelconques portant sur le flux de chaleur et la température. Ce type d'étude pourrait s'appliquer par exemple au calcul des sections de refroidissement des réacteurs nucléaires. L'étude des écoulements sur parois rugueuses constitue un prolongement intéressant qui pourrait être développé simplement par un choix convenable des conditions aux limites reliant les échelles et l'énergie de turbulence à la rugosité. L'étude du transfert de chaleur au sein des fluides turbulents semble pouvoir s'étendre aisément au cas de la convection naturelle ainsi qu'à des cas où sont également présents d'autres modes de transmission de la chaleur tels que l'absorption d'énergie rayonnée. Le domaine des écoulements instationnaires offre un vaste champ d'applications et notamment le calcul des écoulements pulsés sous leur aspect dynamique et thermique en conduite et en couche-limite. Dans le cadre des écoulements libres, l'étude des jets tourbillonnaires conduirait aux applications si importantes du calcul des flammes turbulentes.

Soulignons enfin, que le modèle descriptif proposé, construit dans le but d'élargir le domaine des applications est justifié par sa valeur heuristique opératoire qui permet de traiter des écoulements très différents par leur configuration, par son rôle prévisionnel qui, réduisant l'exécution d'expériences coûteuses, permet de cerner un domaine à étudier et par sa possibilité de fournir des solutions numériques d'écoulements encore mal connus auxquelles peut être accordée une certaine confiance.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages fondamentaux *

- /1/ ABRAMOVICH G.N. (1963) The theory of turbulent jets, the M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts
- /2/ AGOSTINI L. et BASS J. (1950) Les théories de la turbulence, P.S.T. Min. Air n° 237 a
- /3/ BATCHELOR G.K. (1956) The theory of homogeneous turbulence, Cambridge Univ. Press
- /4/ FRIEDLANDER J.K. et TOPPER L. (1962) Turbulence, Classic papers on statistical theory, Interscience Publishers, London
- /5/ HINZE J.O. (1959) Turbulence, Mc Graw Hill Book Company, London
- /6/ LAUNDER B.E. et SPALDING D.B. (1972) Mathematical models of turbulence, Academic Press, London
- /7/ LESLIE D. (1973) Developments in the theory of turbulence, Clarendon Press
- /8/ MONIN A.S. et YAGLOM A.M. (1971) Statistical fluid mechanics, the M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts
- /9/ PANCHEV S. (1971) Random functions and turbulence, Int. Series of monographs in Natural Philosophy, Pergamon Press, Oxford
- /10/ PATANKAR S.V. et SPALDING D.B. (1970) Heat and Mass Transfer in Boundary layers, a general calculation procedure, Intertext Books, London

* Contiennent les références d'articles originaux sur les théories de la turbulence.

- /11/ SCHLICHTING H. (1968) Boundary layer theory.
Mc Graw Hill Book Company, London
- /12/ TENNEKES H. et LUMLEY J.L. (1972) A first course
in turbulence, The M.I.T. Press, Cambridge,
Massachusetts
- /13/ TOWNSEND A.A. (1956) The Structure of turbulent
shear flow, Cambridge Univ. Press
- /14/ Proceedings computation of turbulent boundary
layers AFOVR - IFP Stanford Conference (1968)
Stanford Univ. Press, California (1969)

Références

- /15/ KELLER L.V. et FRIEDMANN A.A. (1924)
Differential gleichung für die turbulente Bewegung
einer kompressiblen Flüssigkeit.
Proc. First Int. Congr. Appl. Mech. Delft
- /16/ BASS J. (1961)
Principes d'une théorie non probabiliste de la tur-
bulence. Mécanique de la turbulence.
Editions du C.N.R.S. n° 108 (1962)
- /17/ DEARDORFF J.W. (1970)
A numerical study of three-dimensional turbulent
channel flow at large Reynolds numbers.
J. Fluid Mech. 41, 2, p. 453
- /18/ FOX D.G. et DEARDORFF J.W. (1972)
Computer methods for simulation of multidimensional,
non linear, subsonic, incompressible flow.
J. Heat Transfer 94, 4, p. 337
- /19/ LILLY D.K. (1971)
Numerical simulation of developing and decaying
two-dimensional turbulence.
J. Fluid Mech. 45, 2, p. 395
- /20/ MALKUS W.V.R. (1956)
Outline of a theory of turbulent shear flow.
J. Fluid Mech. 1, 2, p. 521

- /21/ TOWNSEND A.A. (1961)
Remarks on the Malkus theory of turbulent flow.
Mécanique de la turbulence, Editions du CNRS n°108(1962)
- /22/ TYLDESLEY J.R. et SILVER R.S. (1968)
The prediction of the transport properties of a turbulent fluid.
Int. J. Heat Mass Transfer 11, p. 1325
- /23/ TYLDESLEY J.R. (1969)
Transport phenomena in free turbulent flows.
Int. J. Heat Mass Transfer 12, p. 489
- /24/ LANDAHL M.T. (1967)
A wave-guide model for turbulent shear flow.
J. Fluid Mech. 29, p. 441
- /25/ PHILLIPS O.M. (1967)
The maintenance of Reynolds stress in turbulent shear flow.
J. Fluid Mech. 27, 1, p. 131
- /26/ LUMLEY J. (1967)
On a rational approach to relations between motions of differing scales in turbulent flow.
Physics of Fluids 10, p. 1405
- /27/ CROW J. (1968)
Turbulent Rayleigh shear flow.
J. Fluid Mech. 32, 1, p. 113
- /28/ TOWNSEND A.A. (1961)
Equilibrium layers and wall turbulence.
J. Fluid Mech. 11, 1, p. 97
- /29/ HOPF E. (1952)
Statistical hydromechanics and functional calculus.
J. Rat. Mech. Anal. 1, 1, p. 87
- /30/ ROSEN G. (1971)
Functional calculus theory for incompressible fluid turbulence.
J. of Math. Phys. 12, p. 812

- /31/ KRAICHNAN R. (1959)
The structure of isotropic turbulence at very high
Reynolds numbers.
J. Fluid Mech. 5, 4, p. 497
- /32/ PROUDMAN I. (1961)
On Kraichnan's theory of turbulence.
Mécanique de la turbulence, Editions du CNRS n°108(1962)
- /33/ LUNDGREN T.S. (1967)
Distribution functions in the statistical theory of
turbulence.
Physics of Fluids 10, 5, p. 969
- /34/ LUNDGREN T.S. (1969)
Model equation for non homogeneous turbulence.
Physics of Fluids 12, 3, p. 485
- /35/ LUNDGREN T.S. (1971)
Turbulent pipe and channel flow.
Physics of Fluids 14, 2, p. 225
- /36/ YEN J.T. (1972)
Kinetic theory of turbulent flow.
Physics of Fluids 15, 10, p. 1728
- /37/ CHUNG P.M. (1970)
Chemical reaction in a turbulent flow field with
uniform velocity gradient.
Physics of Fluids 13, 5, p. 1153
- /38/ SPIEGEL E.A. (1972)
Qualitative model for turbulent intermittency.
Physics of Fluids 15, 8, p. 1372
- /39/ PRUDNIKOV A.G., SAGALOVICH V.N. et YUKINA E.P. (1972)
Diffusion and vortex models of the turbulent jet.
Fluid Mech. Soviet Research 1, 5, p. 87
- /40/ INOUE M., MARVIN J.G., SHEAFFER Y.S. (1972)
Turbulent wake calculations with an eddy viscosity
model.
A.I.A.A.J. 10, 2, p. 216

- /41/ ESCUDIER M.P. et NICOLL W.B. (1968)
A method for prediction of turbulent boundary layer development based on the shear-work integral.
Int. Summer School on Heat and mass Transfer.
Sept. 1968, Herceg-Novı, Yugoslavia.
- /42/ LAUNDER B.E. et JONES W.P. (1968)
On the prediction of laminarisation.
Int. Summer School on Heat and Mass Transfer.
Sept. 1968, Herceg-Novı, Yugoslavia
- /43/ PLETCHER R.H. (1970)
On a solution for turbulent boundary layer flows with heat transfer, pressure gradients, and wall flowing or suction.
Fourth Int. Heat Transfer Conference, Paris-Versailles (1970) F.C. 2-9
- /44/ PLETCHER R.H. (1972)
Calculation Method for compressible turbulent boundary flows with heat transfer.
A.I.A.A.J. 10, 3, p. 245
- /45/ BAKER R.J. et LAUNDER B.E. (1974)
The turbulent boundary layer with foreign gas injection I. Measurements in zero pressure gradient II. Predictions and measurements in severe stream-wise pressure gradients.
Int. J. Heat Mass Transfer 17, p. 275
- /46/ MELLOR G.L. et GIBSON D.M. (1966)
Equilibrium turbulent boundary layers.
J. Fluid Mech. 24, p. 225
- /47/ CEBECI T., SMITH A.M.O. et MOSINSKI G. (1970)
Solution of the incompressible turbulent boundary layer equations with heat transfer.
J. Heat Transfer 92, p. 133
- /48/ CEBECI T. (1970)
Application of "exact" turbulent boundary-layer equations as a means of calculating heat and mass transfer in incompressible and compressible flows.
Fourth Int. Heat Transfer Conference, Paris-Versailles (1970) F.C. 24

- /49/ COUSTEIX J., QUEMARD C., MICHEL R. (1971)
Application d'un schéma amélioré de longueur de mélange à l'étude des couches-limites turbulentes tridimensionnelles.
A.G.A.R.D. Conference Proceedings CP 93
On Turbulent Shear Flows, London, Sept. 1971
- /50/ LILI T. et MICHEL R. (1971)
Couche limite turbulente avec injection à la paroi d'un même gaz ou d'un gaz étranger.
A.G.A.R.D. Conference Proceedings CP 93
On Turbulent Shear Flows, London, Sept. 1971
- /51/ KLEINSTEIN G. (1967)
Generalized law of the wall and eddy viscosity model for wall boundary layers.
A.I.A.A.J. 5, 8, p. 1402
- /52/ GOSSE J. (1961)
Sur l'écoulement turbulent des fluides.
C.R. Acad. Sci. 253, 1, p. 61
- /53/ LEVICH V.G.
Physicochemical Hydrodynamics.
Prentice-Hall, Englewood Cliffs N.J. (1962)
- /54/ KORKEGI R.H. et BRIGGS A.R. (1968)
On turbulent compressible plane Couette flow.
A.I.A.A.J. 6, p. 742
- /55/ CHUE S.H. et Mc DONALD A.T. (1970)
Application of a new effective viscosity model to turbulent plane Couette flow.
A.I.A.A.J. 8, p. 2076
- /56/ KLEINSTEIN G. (1971)
Eddy viscosity model for turbulent pipe flow.
A.I.A.A.J. 9, 8, p. 1626
- /57/ MEI J. et SQUIRE W. (1972)
A simple eddy viscosity model for turbulent pipe and channel flow.
A.I.A.A.J. 10, p. 350

- /58/ SIMPSON R.L., WHITTEN D.G. et MOFFATT R.J. (1970)
An experimental study of the turbulent Prandtl
number of air with injection and suction.
Int. J. Heat Mass Transfer 13, 1, p. 125
- /59/ CEBECI T. (1973)
A model for eddy conductivity and turbulent Prandtl
number.
J. Heat Transfer May 73, p. 227
- /60/ MATHIEU J. (1971)
Remarks on turbulent flows with free stream boundaries.
Von Karman Institute for Fluid Dynamics
Lecture Series 36, Turbulent Jet Flows (1971)
- /61/ BRADBURY L.J.S. (1971)
A review of theoretical and experimental work on the
development of turbulent jets.
Von Karman Institute for Fluid Dynamics
Lecture Series 36, Turbulent Jet Flows (1971)
- /62/ WOLFSTEIN M. (1969)
The velocity and temperature distribution in one-
dimensional flow with turbulence augmentation and
pressure gradient.
Int. J. Heat Mass Transfer 12, p. 301
- /63/ NEVZGLJADOV V. (1945)
A phenomenological theory of turbulence.
J. of Physics 9, 3, p. 235
- /64/ GAWAIN T.H. et PRITTCHETT J.W. (1970)
A Unified heuristic model of fluid turbulence.
J. Of. Computational Physics 5, p. 383
- /65/ LUNDGREN T.S. et WANG F.C. (1973)
Eddy viscosity models for free turbulent flows.
Physics of Fluids 16, 2, p. 174
- /66/ BRADSHAW P., FERRISS D.H. et ATWELL N.P. (1967)
Calculation of boundary-layer development using the
turbulent energy equation.
J.Fluid Mech. 28, p. 593

- /67/ NASH J.F. (1969)
The calculation of three dimensional turbulent
boundary layers in incompressible flow.
J. Fluid Mech. 37, p. 625
- /68/ BRADSHAW P. (1971)
Calculation of three dimensional turbulent
boundary layers.
J. Fluid Mech. 46, p. 417
- /69/ WESSELING P. et LINDHOUT J.P.F. (1971)
A calculation method for three dimensional incom-
pressible turbulent boundary layers.
A.G.A.R.D. Conference Proceedings CP 93
on Turbulent Shear Flows, London, Sept 1971
- /70/ NEE W. et KOVASZNAVY L.S.G. (1969)
Simple phenomenological theory of turbulent shear flows.
Physics of Fluids 12, 3, p. 473
- /71/ LEE S.C. et AUILER J.E. (1970)
Theory of two dimensional turbulent wakes.
A.I.A.A.J. 8, 10, p. 1876
- /72/ HARSHA P.T. et LEE S.C. (1970)
Correlation between turbulent shear stress and
turbulent kinetic energy.
A.I.A.A.J. 8, 8, p. 1508
- /73/ WASSEL A.T. et CATTON I. (1973)
Calculation of turbulent boundary layers over flat
plates with different phenomenological theories of
turbulence and variable turbulent Prandtl number.
Int. J. Heat Mass Transfer 16, p. 1547
- /74/ SAFFMAN P.G. (1970)
A model for inhomogeneous turbulent flow.
Proc. Roy. Soc. Lond. A. 317, p. 417
- /75/ HARLOW F.H. et NAKAYAMA P.I. (1967)
Turbulence Transport Equations.
Physics of Fluids 10, 11, p. 2323

- /76/ HARLOW F.H. et NAKAYAMA P.I. (1968)
Transport of turbulence energy decay rate.
Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-3854
- /77/ SPALDING D.B. (1972)
A two equation model of turbulence.
VDI - Forsch - Heft 549, p. 5
- /78/ SPALDING D.B. (1969)
The calculation of the length scale of turbulence in
some shear flows remote from walls.
Progress in Heat and Mass Transfer, vol 2
Pergamon Press, London
- /79/ RODI W. et SPALDING D.B. (1970)
A two parameter model of turbulence and its appli-
cations to free jets.
Wärme und Stoffübertragung 3, p. 85
- /80/ NG K.H. et SPALDING D.B. (1972)
Turbulence model for boundary layers near walls.
Physics of Fluids 15, p. 20
- /81/ WOLFSHTEIN M. (1970)
On the length scale of turbulence equation.
Israel J. of Technology 8, 1-2, p. 87
- /82/ HARLOW F.H. (1968)
Transport of anisotropic or low-intensity turbulence.
Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-3947
- /83/ JONES W.P. et LAUNDER B.E. (1972)
The prediction of laminarisation with a two-
equations model of turbulence.
Int. J. Heat Mass Transfer 15, p. 301
- /84/ JONES W.P. et LAUNDER B.E. (1973)
The calculation of low-Reynolds number phenomena
with a two equations model of turbulence.
Int. J. Heat Mass Transfer 16, p. 1119
- /85/ GLUSHKO G.S. (1972)
Differential equation for the scale of turbulence and
calculation of the turbulent boundary layer at a flat
plate.
Fluid Mech. Soviet Research 1,2, p. 155

- /86/ SPALDING D.B. (1971)
Concentration fluctuations in a round turbulent free jet.
J. Chem. Engng . Sci. 26, p. 95
- /87/ CHOU P.Y. (1945)
On velocity correlations and the solutions of the
equations of turbulent fluctuations.
Quart. of Appl. Math. 3, p. 38
- /88/ CHOU P.Y. (1945)
Pressure flow of a turbulent fluid between two
infinite parallel planes.
Quart. of Appl. Math. 3, p. 198
- /89/ ROTTA J.C. (1951)
Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz I.
Zeitschrift für Physik 129, p. 547
- /90/ ROTTA J.C. (1951)
Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz II.
Zeitschrift für Physik 131, p. 51
- /91/ ROTTA J.C. (1971)
Recent attempts to develop a generally applicable cal-
culation method for turbulent shear flow layers.
A.G.A.R.D. Conference Proceedings C.P. 93
on Turbulent shear Flows, London, Sept 1971
- /92/ TRUSOV B.G. (1972)
The establishment of a relationship between the inten-
sity value and the dissipation of energy of turbulence.
Fluid Mech. Soviet Research 1, 5, p. 164
- /93/ DONALDSON C. du P. (1969)
A computer study of an analytical model of boundary
layer transition.
A.I.A.A.J. 7, 1, p. 271
- /94/ DONALDSON C. du P. (1971)
A progress report on an attempt to construct an
invariant model of turbulent shear flows.
A.G.A.R.D. Conference Proceedings C.P. 93
on Turbulent Shear Flows, London, Sept 1971

- /95/ HARLOW F.H. et HIRT C.W. (1969)
Generalized transport theory of anisotropic turbulence.
Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-4086
- /96/ HIRT C.W. (1969)
Generalized Turbulence Transport Equations
Int. Seminar of the Int. Centre for Heat and Mass
Transfer, Herceg Novi, Yugoslavia, Sept. 1969
- /97/ DALY B.J. et HARLOW F.H. (1970)
Transport equations in turbulence.
Physics of Fluids 13, 11, p. 2634
- /98/ GOSSE J. (1969)
Description du mouvement d'un fluide dans un champ
de diffusion massique.
C.R. Acad. Sci. A 268, p. 561
- /99/ GOSSE J. (1970)
Description du mouvement turbulent d'un fluide et
autodiffusion résultant de la turbulence.
C.R. Acad. Sci. A 270, p. 412
- /100/ GOSSE J. (1970)
Le coefficient de viscosité ou de diffusion par
turbulence dans une nouvelle description.
C.R. Acad. Sci. A 271, p. 1276
- /101/ GOSSE J. (1970)
Sur la turbulence du fluide en aval d'une grille.
C.R. Acad. Sci. A 270, p. 1459
- /102/ HANJALIC' K. et LAUNDER B.E. (1972)
A Reynolds stress model of turbulence and its
application to thin shear flow.
J. Fluid Mech. 52, 4, p. 609
- /103/ KOLOVANDINE B.A. et VATUTINE I.A. (1969)
On the statistical theory of non-uniform turbulence.
Progress in Heat and Mass Transfer, vol. 4
Pergamon Press, London

- /104/ KOLOVANDINE B.A. et VATUTINE I.A. (1972)
Statistical transfer theory in non-homogeneous turbulence.
Int. J. Heat Mass Transfer 15, 12, p. 2371
- /105/ KOLOVANDINE B.A. (1968)
Transfer of scalar substance in turbulent shear flows.
Int. Summer School on Heat and Mass Transfer
Sept. 1968, Herceg-Nov, Yugoslavia
- /106/ KOLOVANDINE B.A. (1970)
Scalar substance transfer in non homogeneous turbulence.
Fourth Int. Heat Transfer Conference, Paris-Versailles
(1970) C.T. 2.6
- /107/ GOSSE J. et SCHIESTEL R. (1972)
Modèle descriptif du mouvement turbulent d'un fluide
isovolume.
C.R. Acad. Sci. A 275, p. 471
- /108/ QUARMBY A. et QUIRK R. (1972)
Measurements of the radial and tangential eddy diffusivities of heat and mass in turbulent flow in a plain tube.
Int. J. Heat Mass Transfer 15, 11, p. 2309
- /109/ NAOT D. (1973)
Two-point correlation model and the redistribution of REYNOLDS stresses.
Physics of Fluids 16, 6, p. 738
- /110/ KISTLER A. L. et VREBALOVICH T. (1966)
Grid turbulence at large REYNOLDS numbers.
J. Fluid Mech. 26, p. 37
- /111/ BAINES W.D. et PETERSON E.G. (1951)
Investigation of flow through screens.
Trans. ASME 73, 1, p. 467
- /112/ COMTE-BELLOT G. et CORRSIN S. (1966)
The use of a contraction to improve the isotropy of grid generated turbulence.
J. Fluid Mech. 25, 4, p. 657

- /113/ KISTLER A.L. (1961)
The structure of the laminar sublayer.
Mécanique de la turbulence, Editions du C.N.R.S.
n° 108 (1962)
- /114/ CORINO E.R. et BRODKEY R.S. (1969)
A visual investigation of the wall region in turbulent
flow.
J. Fluid Mech. 37, 1, p. 1
- /115/ PY B. (1973)
Etude tridimensionnelle de la sous-couche visqueuse dans
une veine rectangulaire par des mesures de transfert de
matière en paroi.
Int. J. Heat Mass Transfer 16, 1, p. 129
- /116/ MIZUSHINA T., ITO R. et OGINO F. (1970)
Eddy diffusivity distribution near the wall.
Fourth. Int. Heat Transfer Conference, Paris-Versailles
(1970) F.C. 2.8.
- /117/ ROSE W.G. (1966)
Results of on attempt to generate a homogeneous tur-
bulent shear flow.
J. Fluid Mech. 25, p. 97
- /118/ CHAMPAGNE F.H., HARRIS V.G. et CORRSIN S. (1970)
Experiments on nearly homogeneous turbulent shear flow.
J. Fluid Mech. 41, p. 81
- /119/ TUCKER H.J. et REYNOLDS A.J. (1968)
The distorsion of turbulence by irrotational plane strain.
J. Fluid Mech. 32, 4, p. 657
- /120/ RICHTMYER R.D. et MORTON K.W.
Difference methods for initial value problems.
Interscience, New-York 198 (1967)
- /121/ PATEL V.C. et HEAD M.R. (1968-1969)
Reversion of turbulent to laminar flow.
J. Fluid Mech. 34, 2, p. 371
Some observations on skin friction and velocity profiles
in fully developed pipe and channel flows.
J. Fluid Mech. 38, 1, p. 181

- /122/ BEAVERS G.S., SPARROW E.M. et LLOYD J.R. (1971)
Low REYNOLDS number turbulent flow in large aspect
ratio rectangular ducts.
J. of Basic Engng. 93, p. 296
- /123/ SCHIESTEL R. et GOSSE J. (1972)
Prévision numérique du phénomène de transition pour
un écoulement entre deux plans parallèles.
C.R. Acad. Sci. A 275, p. 1371
- /124/ GLUSHKO G.S. (1971)
"Quelques particularités des écoulements turbulents de
fluides incompressibles avec mutations transversales".
Mécanique des liquides et des gaz 4, Isv. Acad. Sc.
URSS, p. 128
- /125/ PENNELL W.T., SPARROW E.M., ECKERT E.R.G. (1972)
Turbulence intensity and time mean velocity distribution
in low REYNOLDS number turbulent pipe flows.
Int. J. Heat Mass Transfer 15, 5, p. 1067
- /126/ HINZE J.O. (1961)
Turbulent pipe-flow.
Mécanique de la turbulence, Editions du CNRS n°108(1962)
- /127/ LAUFER J. (1954)
The structure of turbulence in fully developed pipe flow.
N.A.C.A. TR. 1174
- /128/ LAUFER J. (1951)
Investigation of turbulent flow in a two-dimensional
channel.
N.A.C.A. TR. 1053
- /129/ COMTE-BELLOT G. (1965)
Ecoulement turbulent entre deux parois parallèles.
P.S.T. Min. Air n° 419
- /130/ CLARK J.A. (1968)
A study of incompressible turbulent boundary layers
in channel flow.
J. Basic Engng. D 90, 4, p. 455

- /131/ DUCHATELLE L. et VAUTREY L. (1964)
Détermination des coefficients de convection d'un
alliage NaK en écoulement turbulent entre plaques
planes parallèles.
Int. J. Heat Mass Transfer 7, p. 1017
- /132/ GOSSE J., SCHIESTEL R. et ROBIN M.G. (1973)
A new model of turbulence applied to prediction of
liquid metal heat transfer.
ASME-AICHE Heat Transfer Conference, Atlanta Ga,
August 5-8 (1973)
- /133/ HARRISON W.B. et MENKE J.R. (1949)
Heat transfer to liquid metals flowing in asymme-
trically heated channels.
Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs 71, 7, p. 797
- /134/ DWYER O.E. et TU P.S. (1963)
Unilateral heat transfer to liquid metals flowing
in annuli.
Nuclear Sci. Engng. 15, p. 58
- /135/ SKUPINSKY E., TORTEL J. et VAUTREY L. (1964)
Détermination des coefficients de convection d'un
alliage Sodium-Potassium dans un tube circulaire.
Int. J. Heat Mass Transfer 8, p. 937
- /136/ LYON R.N. (1949)
Forced convection heat transfer theory and experiments
with liquid metals.
AECU 419, ORNL 361 (1949)
- /137/ LUBARSKY B. et KAUFMAN S.J. (1955)
Review of experimental investigations of liquid
metal heat transfer.
NACA TN 3336.
- /138/ SIEGEL R. et SPARROW E.M. (1960)
Comparison of turbulent heat transfer results for
uniform wall heat flux and uniform wall temperature.
Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs 82 p. 152

- /139/ SLEICHER C.A., AWADA A.S. et NOTTER R.H. (1973)
Temperature and eddy diffusivity profiles in NaK.
Int. J. Heat Mass Transfer 16, p. 1565
- /140/ DEISSLER R.G. (1955)
Analysis of turbulent heat transfer, mass transfer and
friction in smooth tubes at high PRANDTL and SCHMIDT
numbers.
NACA Rep 1210
- /141/ GOWEN R.A. et SMITH J.W. (1967)
The effect of the PRANDTL number on temperature profiles
for heat transfer in turbulent pipe flow.
Chemical Engng. Sci. 22, p. 1701
- /142/ JOHNS R.E. et HANRATTY T.J. (1962)
Temperature profiles for turbulent flow of air in a pipe.
Chemical Engng. Sci. 17, p. 867
- /143/ FRIEND W.L. et METZNER A.B. (1958)
Turbulent heat transfer inside tubes and the analogy
among heat, mass, and momentum transfer.
A.I. Ch. E. Journal 4, 4, p. 393
- /144/ SMITH J.W., GOWEN R.A. et WASMUND B.O. (1967)
Eddy diffusivities and temperature profiles for turbulent
heat transfer to water in pipes.
Fundamental research on Heat and Mass Transfer Chemical
Engng. Prog. Symp. Series 77, vol. 63
- /145/ SLEICHER C.A. et EMERYVILLE J.R. (1958)
Experimental velocity and temperature profiles for air
in turbulent pipe flow.
Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs. 80, 3, p. 693
- /146/ ABBRECHT P.H. et CHURCHILL S.W. (1960)
The thermal entrance region in fully developed turbulent
flow.
A.I. Ch.E. Journal 6, 2, p. 268
- /147/ HARRIOT P. et HAMILTON R.M. (1965)
Solid-liquid mass transfer in turbulent pipe flow.
Chem. Engng. Sci. 20, p. 1073

- /148/ NEUMANN J.C. (1968)
Transfert de chaleur en régime turbulent pour les
grands nombres de PRANDTL.
Inf. Aéraul. et Therm. 5, p. 4
- /149/ TACCOEN L. (1968)
Mesure des profils de température dans un écoulement
turbulent d'air dans un tube (fluide incompressible).
Int. Summer School on Heat and Mass Transfer
Sept. 1968, Herceg-Novı, Yugoslavia
- /150/ KADER B.A. et YAGLOM A.M. (1972)
Heat and Mass Transfer laws for fully turbulent wall
flows.
Int. J. Heat Mass Transfer 15, 12, p. 2329
- /151/ CHE PEN CHEN (1973)
Détermination expérimentale du nombre de PRANDTL
turbulent près d'une paroi lisse.
Int. J. Heat Mass Transfer 16, p. 1849
- /152/ KESTIN J. et RICHARDSON P.D. (1961)
Heat transfer across turbulent incompressible
boundary layers.
Mécanique de la turbulence, Ed. du C.N.R.S. n°108(1962)
- /153/ BLOM J. (1970)
Experimental determination of the turbulent PRANDTL
number in a developing temperature boundary layer.
Fourth Int. Heat Transfer Conf. Paris-Versailles
(1970) FC. 2.2.
- /154/ MATHIEU J. (1961)
Contribution à l'étude aérothermique d'un jet plan
évoluant en présence d'une paroi.
P.S.T. Min. Air n° 374
- /155/ TAILLAND A. et MATHIEU J. (1967)
Jet pariétal.
J. Mécanique 6, 1, p. 103

- /156/ BEGUIER C. (1965)
Mesures des tensions de REYNOLDS dans un écoulement
dissymétrique en régime turbulent incompressible.
J. Mécanique 4, 3, p. 319
- /157/ MAUBACH K. et REHME K. (1972)
Negative eddy diffusivities for asymmetric turbulent
velocity profiles ?
Int. J. Heat Mass Transfer 15, 3, p. 425
- /158/ HANJALIC K. et LAUNDER B.E. (1972)
Fully developed asymmetric flow in a plane channel.
J. Fluid Mech. 51, 2, p. 301
- /159/ BRIGHTON J.A. et JONES J.B. (1964)
Fully developed turbulent flow in annuli.
J. Basic Engng. Trans. ASME D 86, p. 835
- /160/ QUARMBY A. (1967)
An experimental study of turbulent flow through
concentric annuli.
Int. J. Mech. Sci. 9, p. 205
- /161/ LEVY S. (1967)
Turbulent flow in an annulus.
J. Heat Transfer, Trans. ASME 89 C, p. 25
- /162/ KAYS W.M. et LEUNG E.Y. (1963)
Heat transfer in annular passages -hydrodynamically
developed turbulent flow with arbitrarily prescribed
heat flux.
Int. J. Heat Mass Transfer 6, p. 537
- /163/ WILSON N.W. et MEDWELL J.O. (1968)
An analysis of heat transfer for fully developed
turbulent flow in concentric annuli.
J. Heat Transfer. Trans. ASME 90 C, p. 43
- /164/ DEISLER R.G. et TAYLOR M.F. (1955)
Analysis of fully developed turbulent heat transfer
and flow in an annulus with various eccentricities.
NACA TN 3451

- /165/ DONNE M.D. et MEERWALD E. (1973)
Heat transfer and friction coefficients for turbulent flow of air in smooth annuli at high temperatures.
Int. J. Heat Mass Transfer 16, 4, p. 787
- /166/ PATANKAR S.V. et SPALDING D.B. (1967)
A finite difference procedure for solving the equations of the two-dimensional boundary layer.
Int. J. Heat Mass Transfer 10, p. 1389
- /167/ SPALDING D.B. (1968)
A general method for predicting friction, heat transfer, and mass transfer in two-dimensional boundary layers.
Int. Summer School on Heat and Mass Transfer
Sept. 1968, Herceg-Novi, Yugoslavia
- /168/ JEANDEL D. et MATHIEU J. (1972)
Méthode de résolution des équations aux dérivées partielles de la couche limite.
C.R. Acad. Sci. A 274, 21, p. 1510
- /169/ JEANDEL D. et MATHIEU J. (1973)
Méthode de calcul de la couche limite turbulente utilisant une équation de comportement du coefficient de BOUSSINESQ.
J. Mécanique 12, p. 629
- /170/ BRADBURY L.J.S. (1965)
The structure of a self-preserving turbulent plane jet.
J. Fluid Mech. 23, p. 31
- /171/ MILLER D.R. et COMINGS E.W. (1957)
Static pressure distribution in the free turbulent jet.
J. Fluid Mech. 3, p. 1
- /172/ VAN DER HEGGE ZIJNEN B.G. (1958)
Measurements of the velocity distribution in a plane turbulent jet of air.
Measurements of the distribution of heat and matter in a plane turbulent jet of air.
Measurements of turbulence in a plane jet of air by the diffusion method and by the hotwire method.
Applied Sci. Research A7, 4, p. 256, 277, 293

- /173/ WYGNANSKI I. et FIEDLER H.E. (1969)
Some measurements in the self preserving jet.
J. Fluid Mech. 38, 3, p. 577
- /174/ BRADBURY L.J.S. et RILEY J. (1967)
The spread of a turbulent plane jet issuing into a
parallel moving airstream.
J. Fluid Mech. 27, p. 381
- /175/ WYGNANSKI I. et FIEDLER H.E. (1970)
The two dimensional mixing region.
J. Fluid Mech. 41, p. 327
- /176/ SUNYACH M. et MATHIEU J. (1969)
Zone de mélange d'un jet plan.
Int. J. Heat Mass Transfer 12, 2, p. 1679
- /177/ MILLS R.D. (1968)
Numerical and experimental investigations of the
shear layer between two parallel streams.
J. Fluid Mech. 33, p. 59
- /178/ TOWNSEND A.A. (1949)
Fully developed turbulent wake of a circular cylinder.
Aust. J. Sci. Res. 2, p. 451

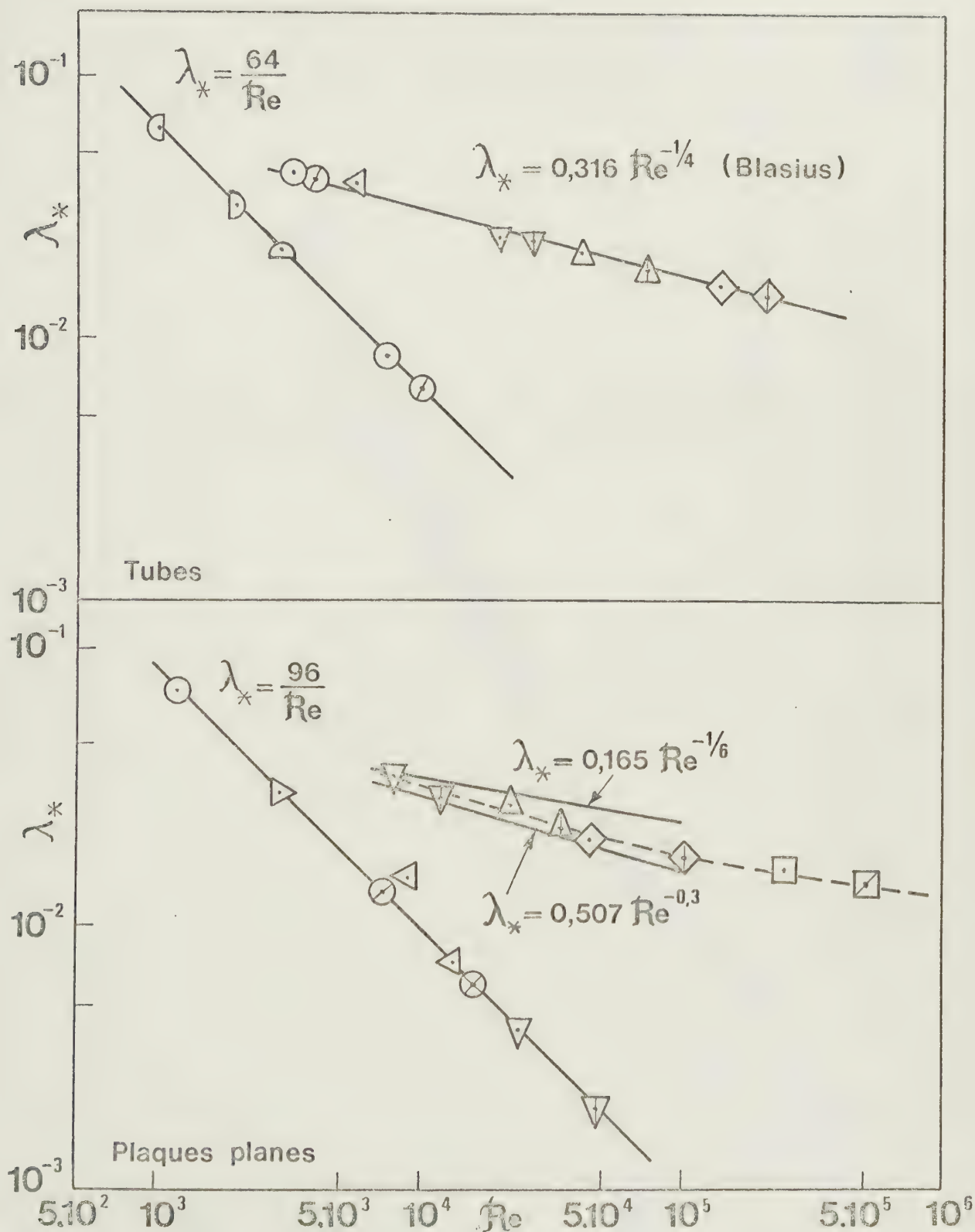


FIG 1 COEFFICIENTS DE PERTE DE CHARGE (MODELE SIMPLIFIE)



FIG 2 PROFILS LOGARITHMIQUES DE VITESSE ENTRE PLAQUES PLANES (MODELE SIMPLIFIE)

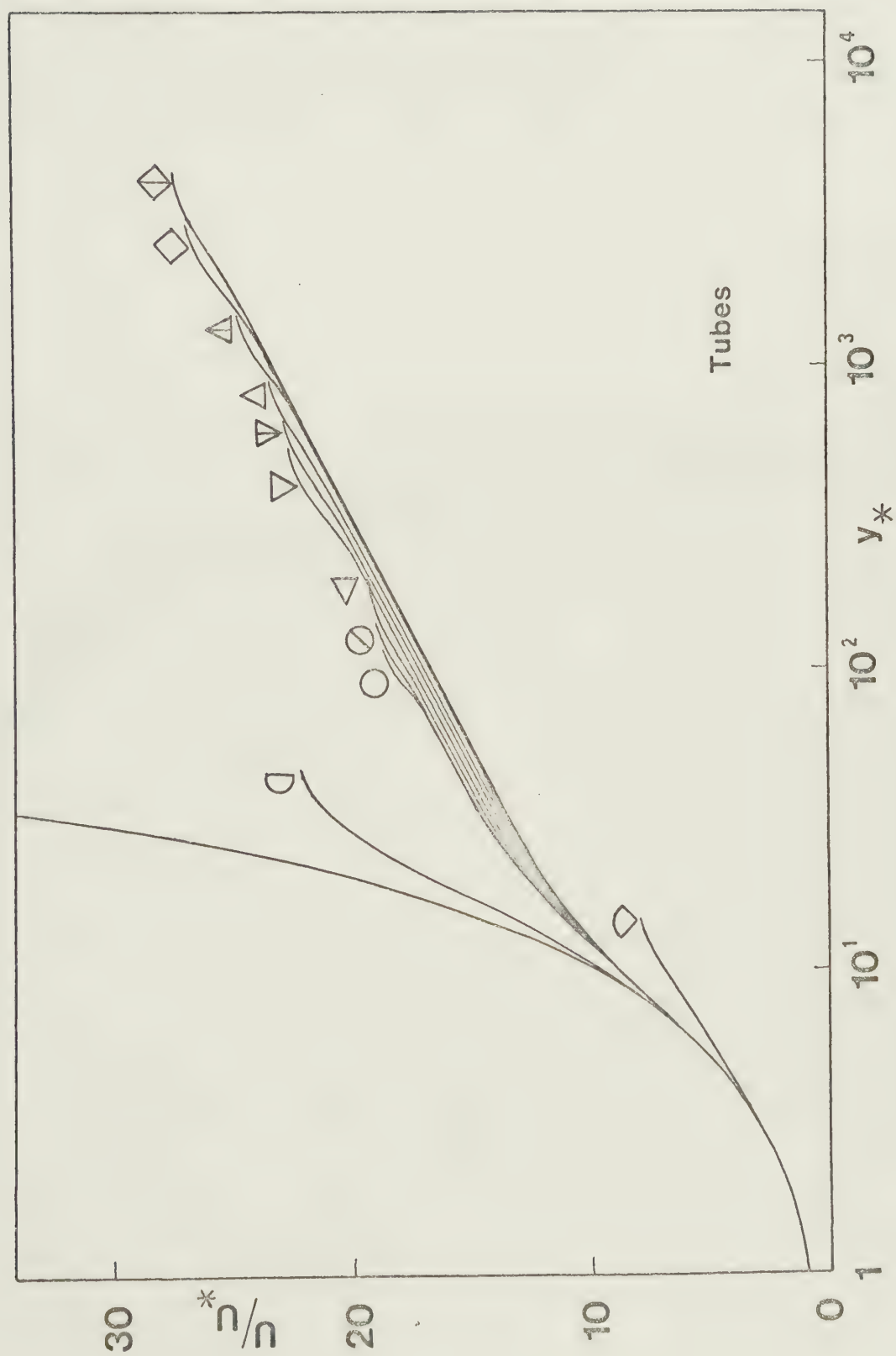


FIG 3 PROFILS LOGARITHMIQUES DE VITESSE DANS UN TUBE CIRCULAIRE (MODELE SIMPLIFIE)

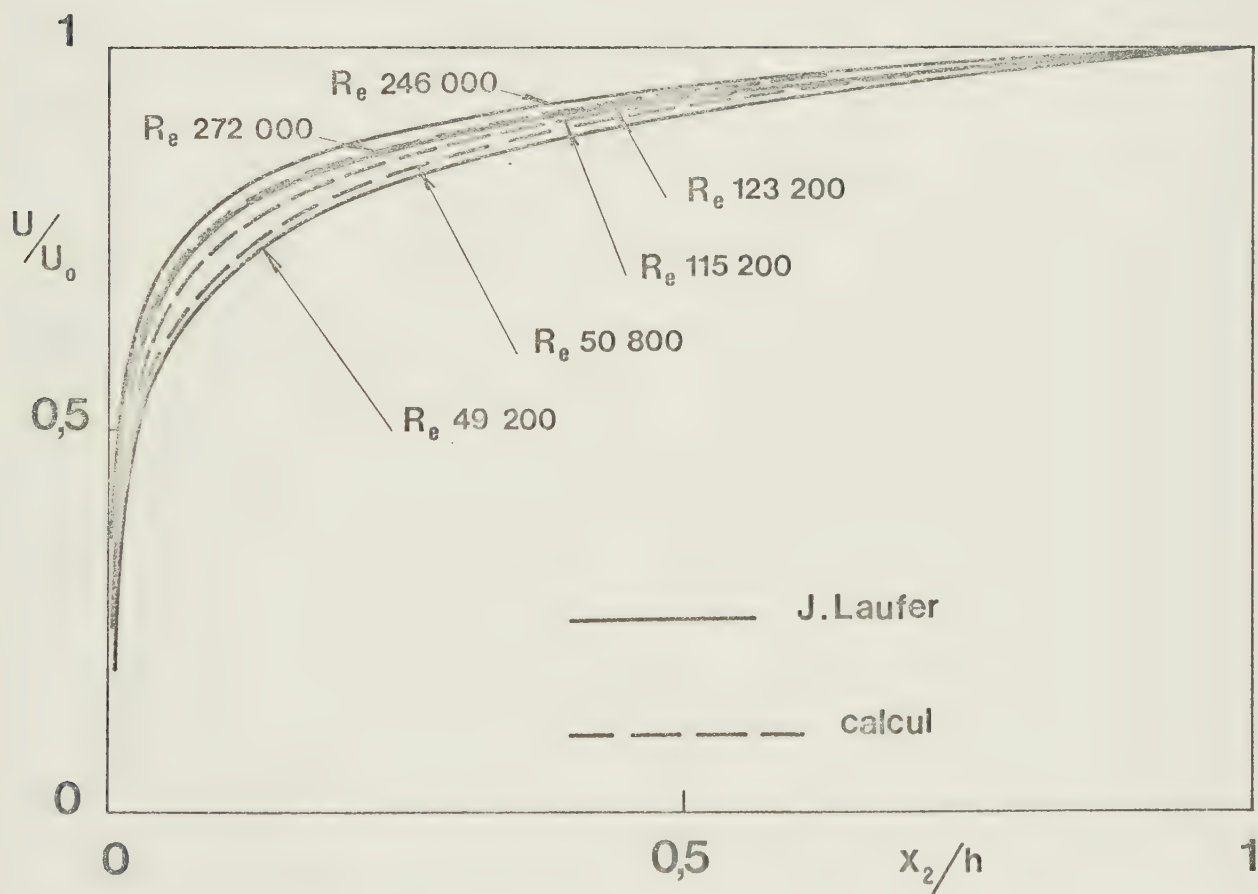


FIG 4 PROFILS DE VITESSE MOYENNE DANS L'ÉCOULEMENT ENTRE PLAQUES PLANES (MODÈLE SIMPLIFIÉ)

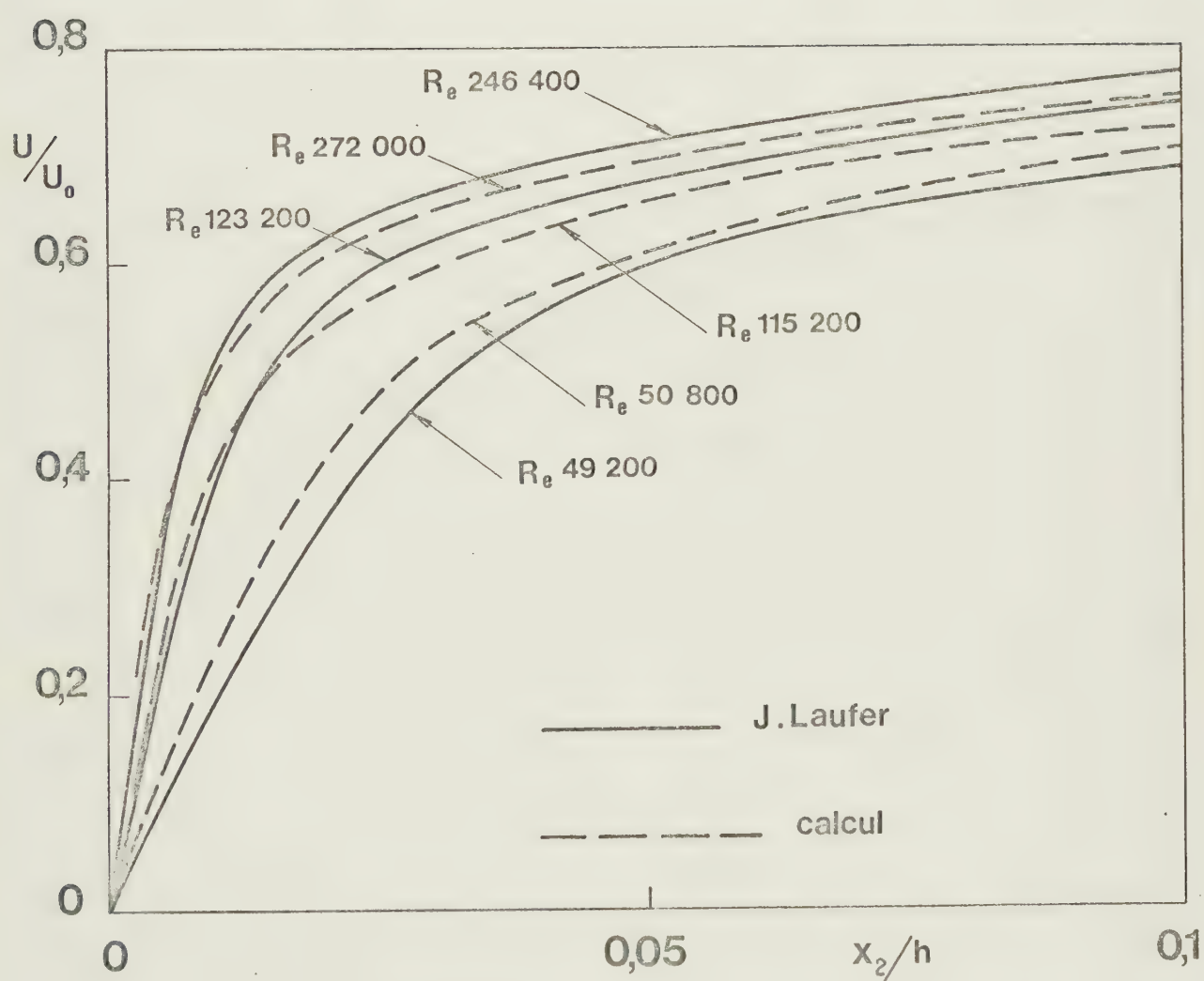


FIG 5 VITESSE MOYENNE PRES DE LA PAROI DANS L'ECOULEMENT ENTRE PLAQUES PLANES A DIFFERENTS NOMBRES DE REYNOLDS (MODELE SIMPLIFIE)

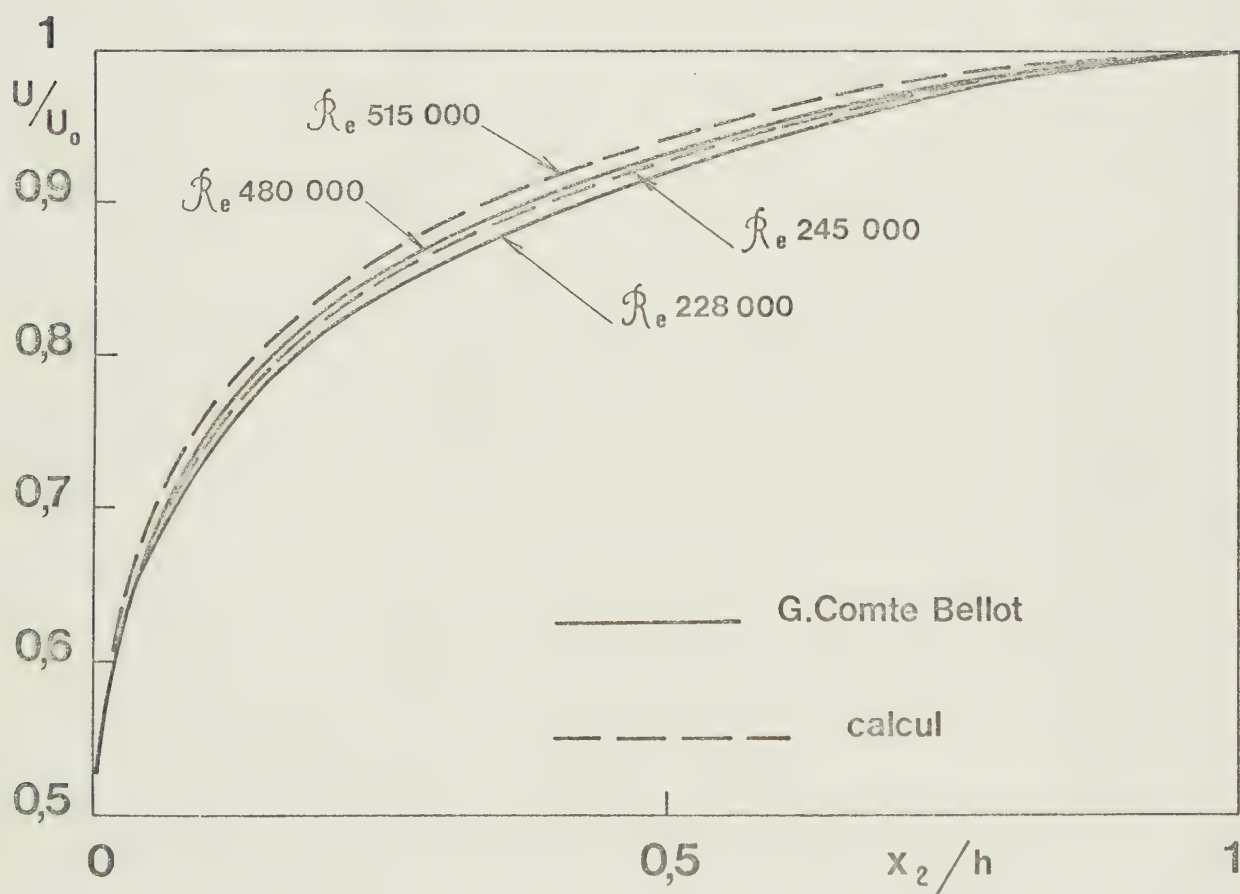


FIG 6 PROFILS DE VITESSE MOYENNE DANS L'ÉCOULEMENT
ENTRE PLAQUES PLANES (MODÈLE SIMPLIFIÉ)

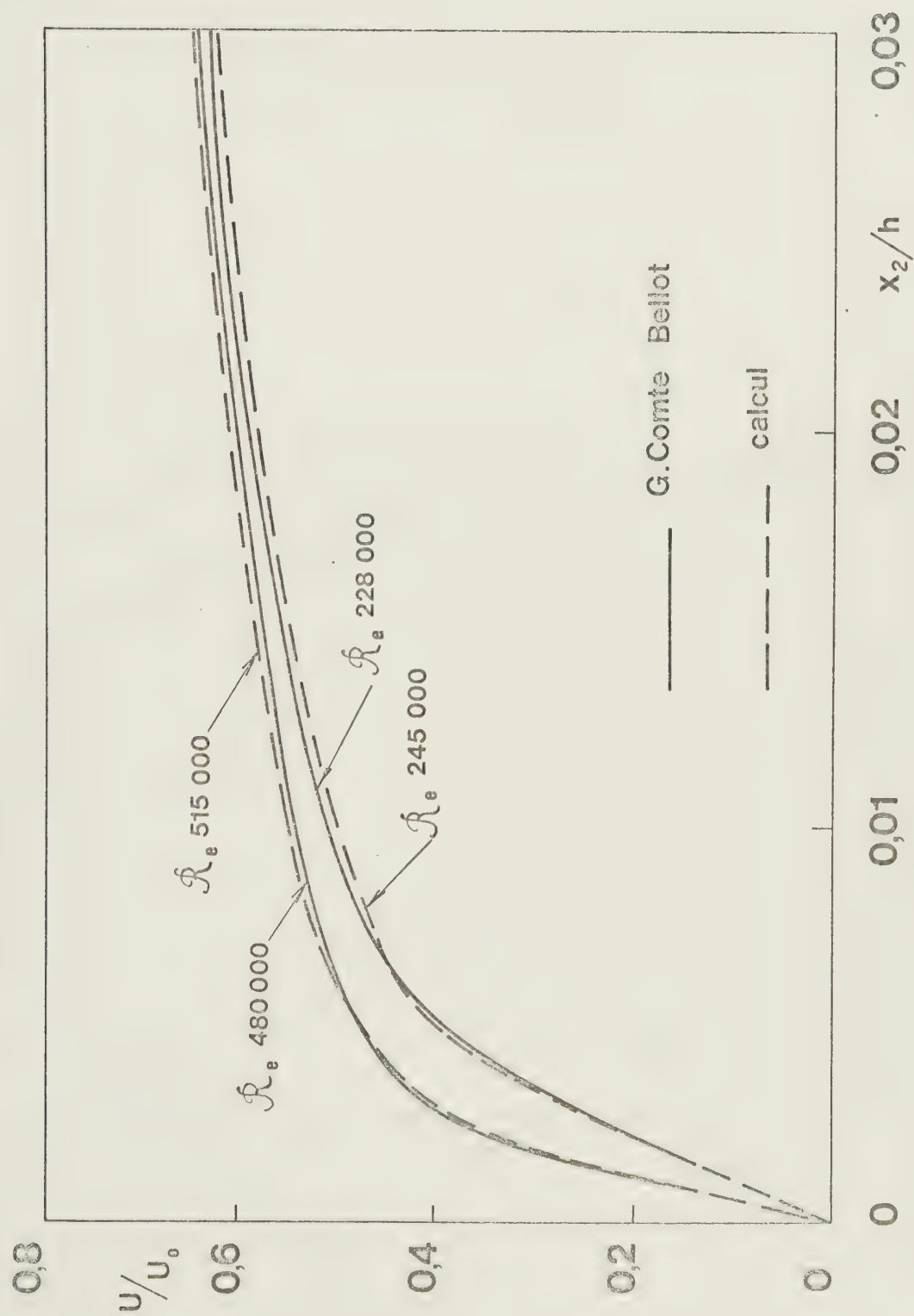


FIG 7 VITESSE MOYENNE PRÈS DE LA PAROI DANS L'ÉCOULEMENT ENTRE PLAQUES PLANES À DIFFÉRENTS NOMBRES DE REYNOLDS (MODÈLE SIMPLIFIÉ)

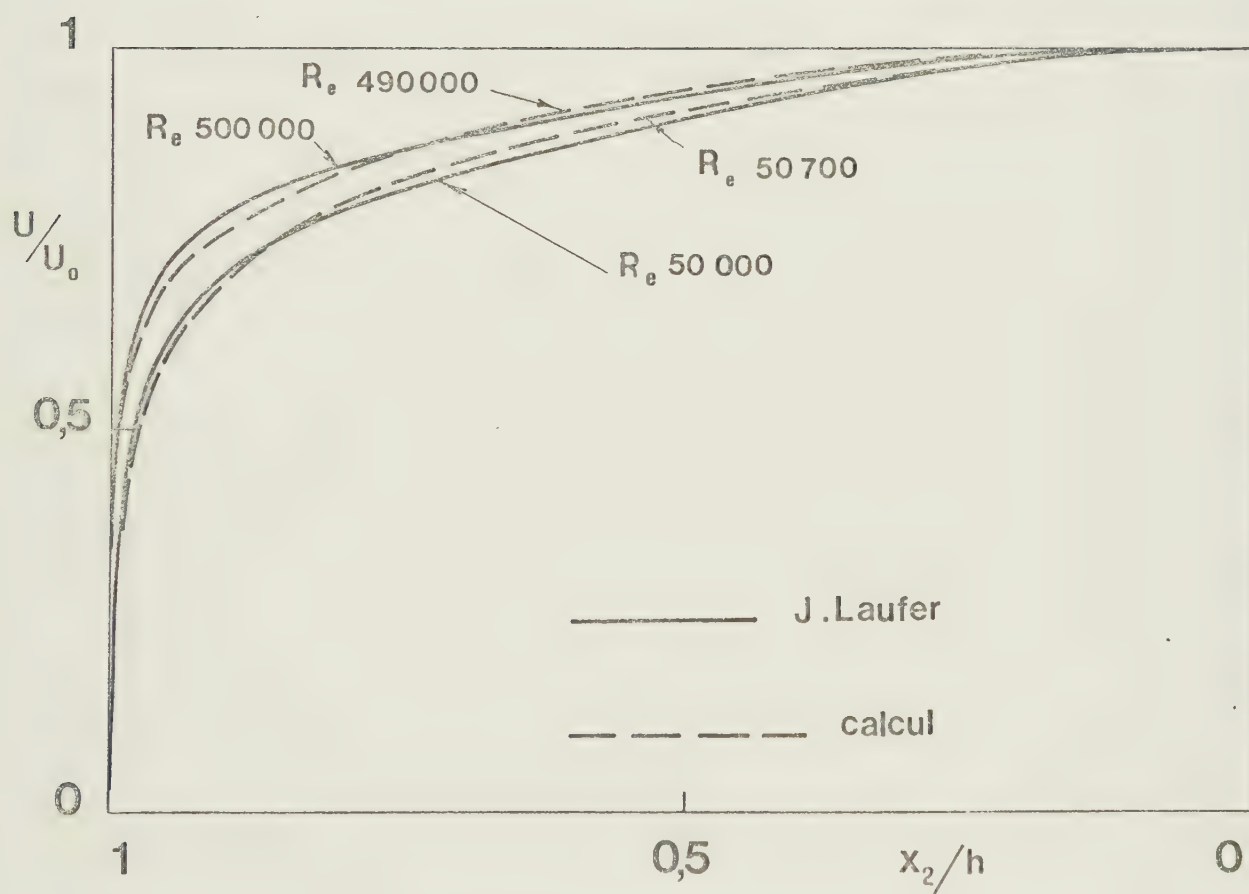


FIG 8 PROFILS DE VITESSE MOYENNE DANS UN TUBE CIRCULAIRE (FOURTE BIENFIDEL)

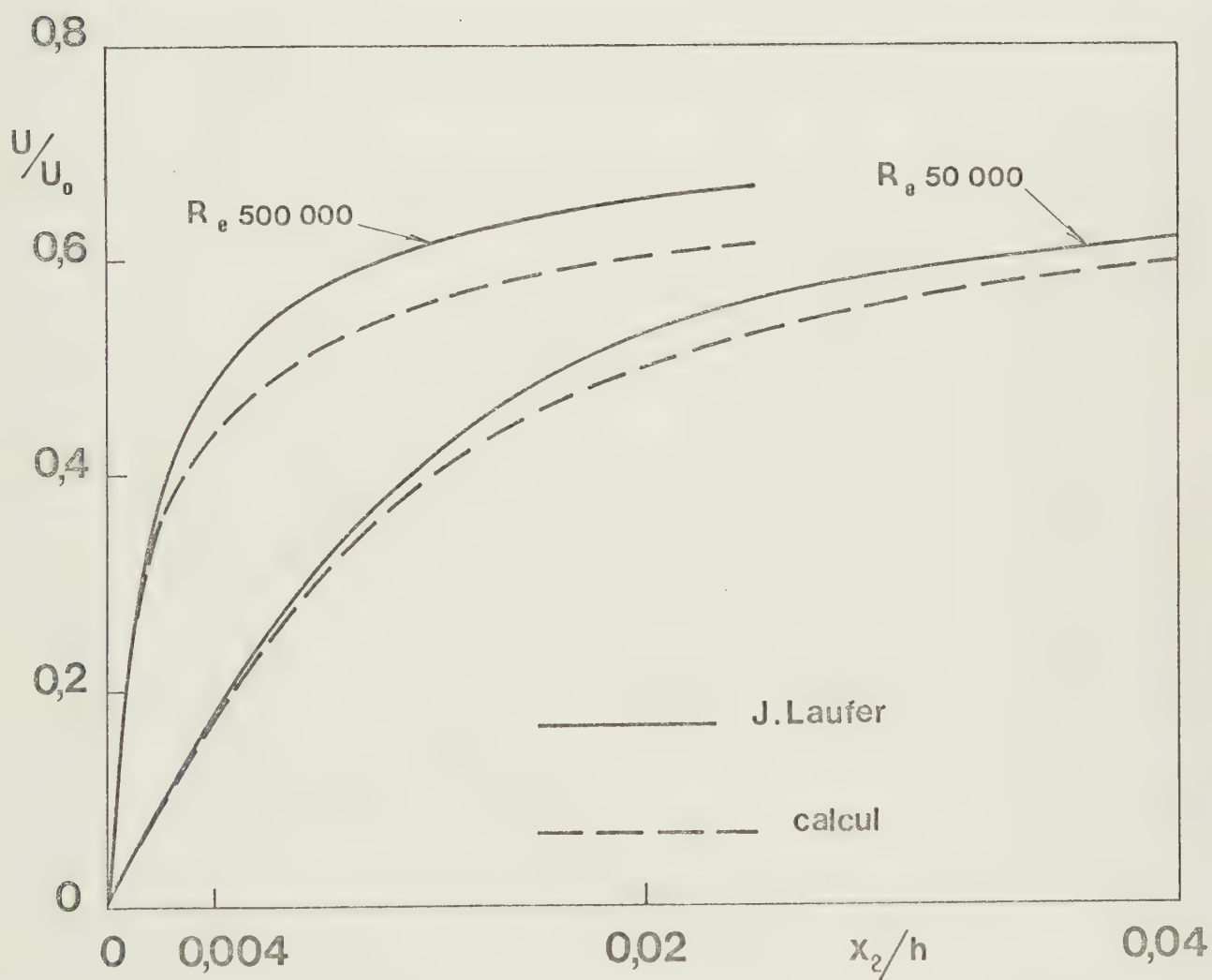


FIG 9 VITESSE MOYENNE PRES DE LA PAROI DANS UN TUBE CIRCULAIRE A DIFFERENTS NOMBRES DE REYNOLDS (MODELE SIMPLIFIE)

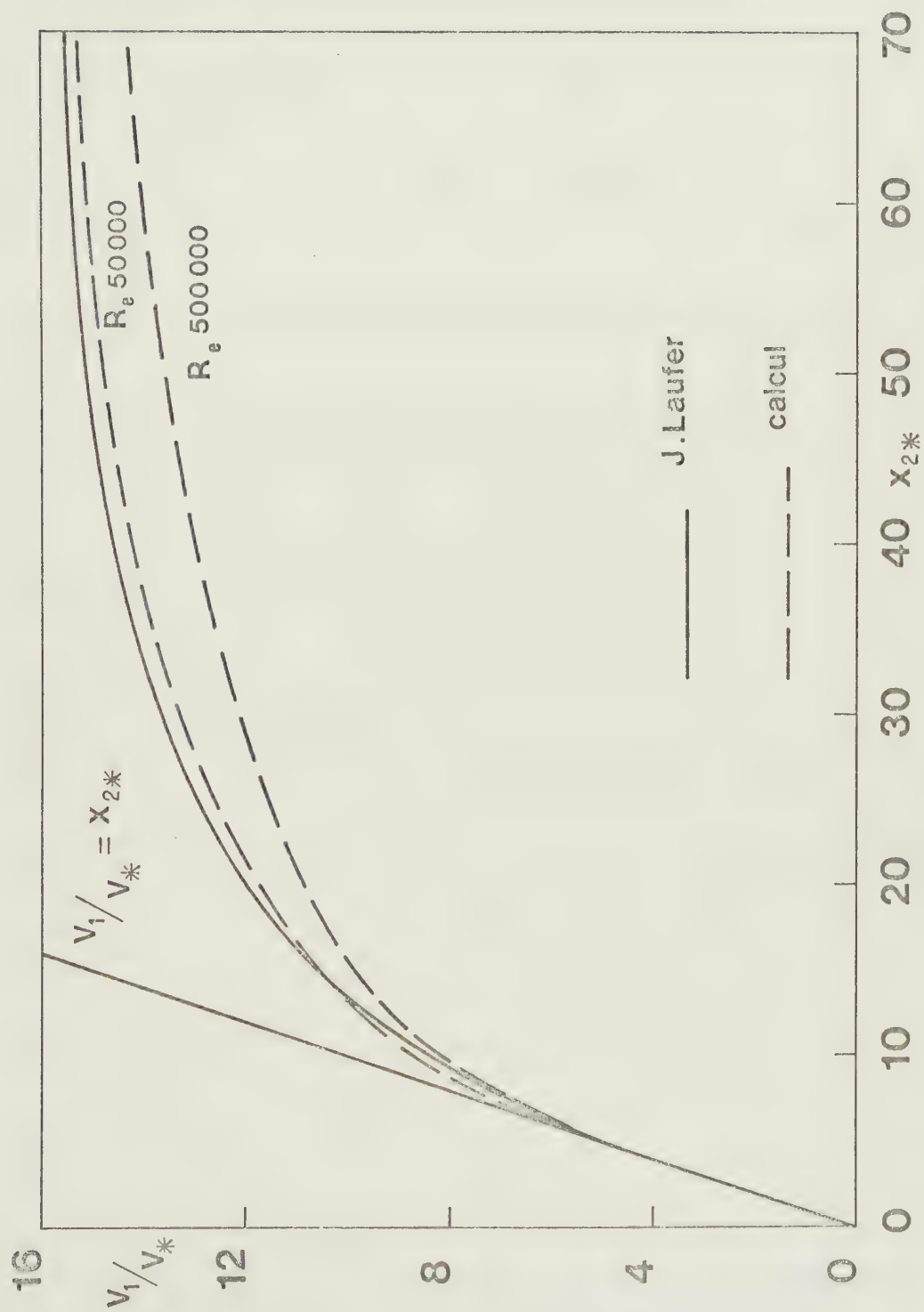


FIG 10 VITESSE MOYENNE PRES DE LA PAROI DANS UN TUBE CIRCULAIRE
(MODELE SIMPLIFIE)

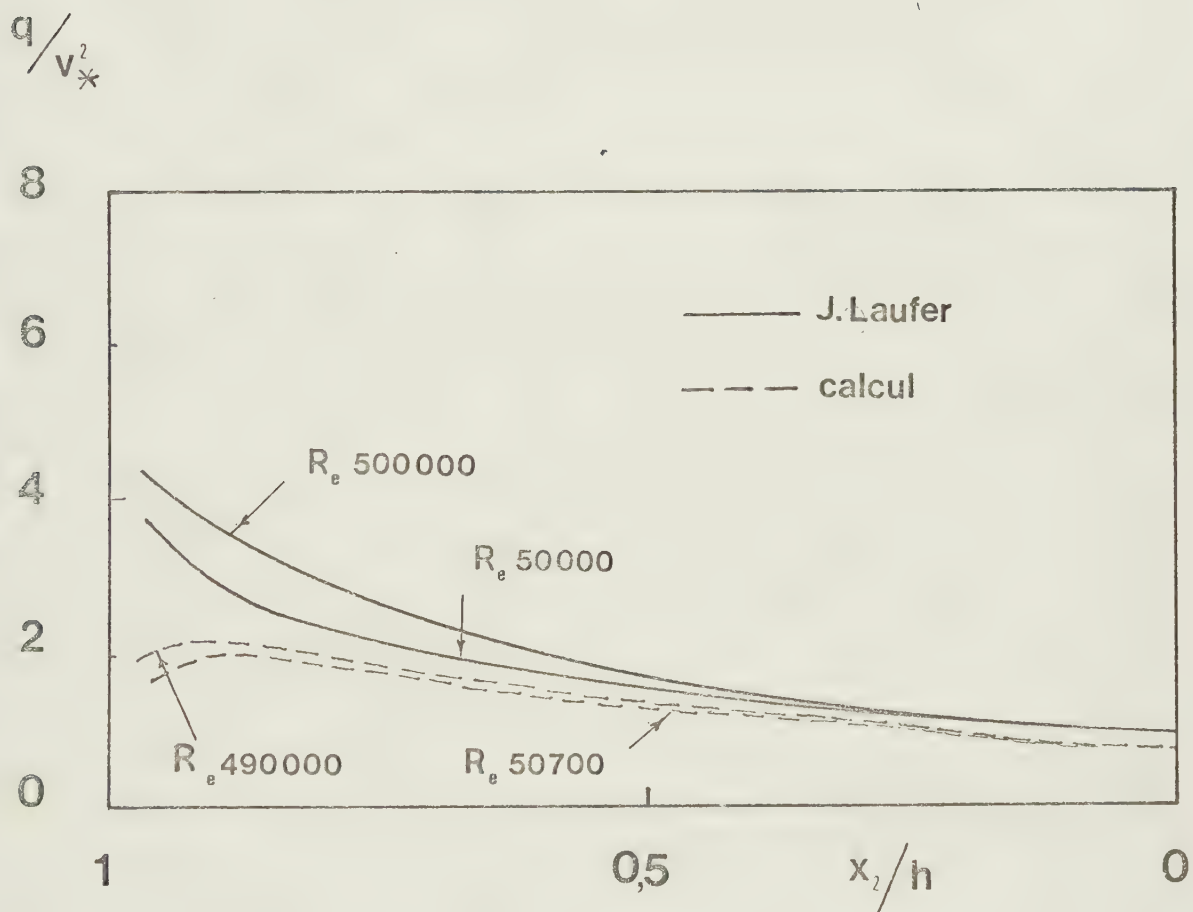


FIG 11 PROFILS D'ENERGIE CINETIQUE DE TURBULENCE
DANS UN TUBE CIRCULAIRE (MODELE SIMPLIFIE)

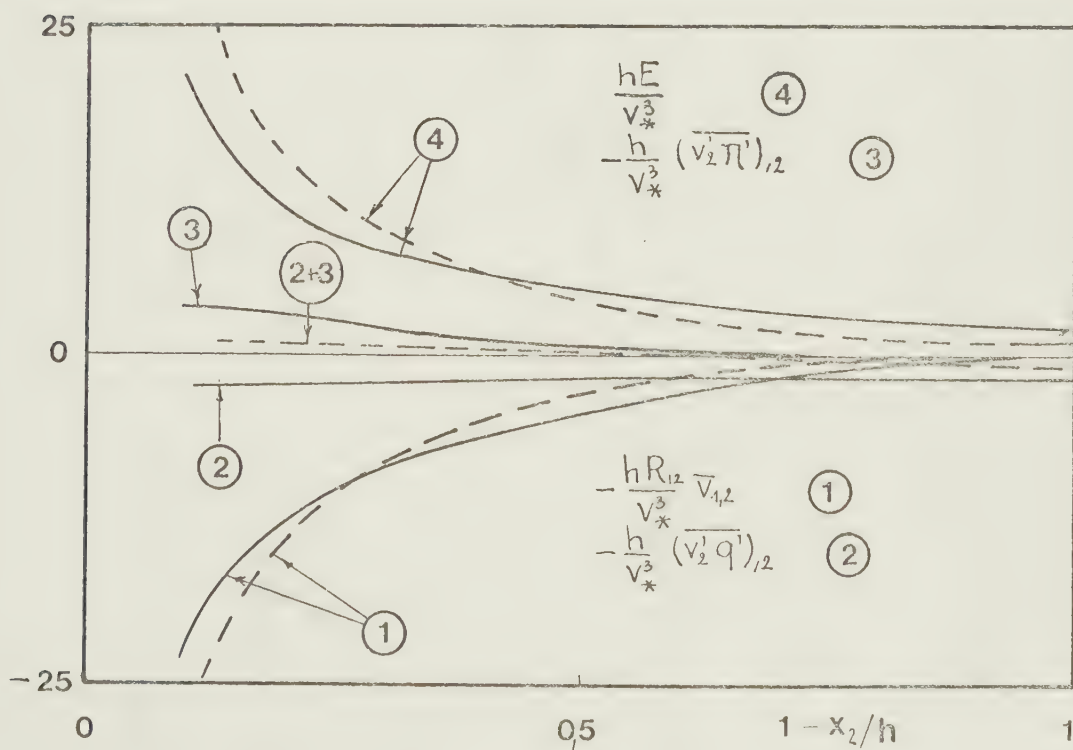
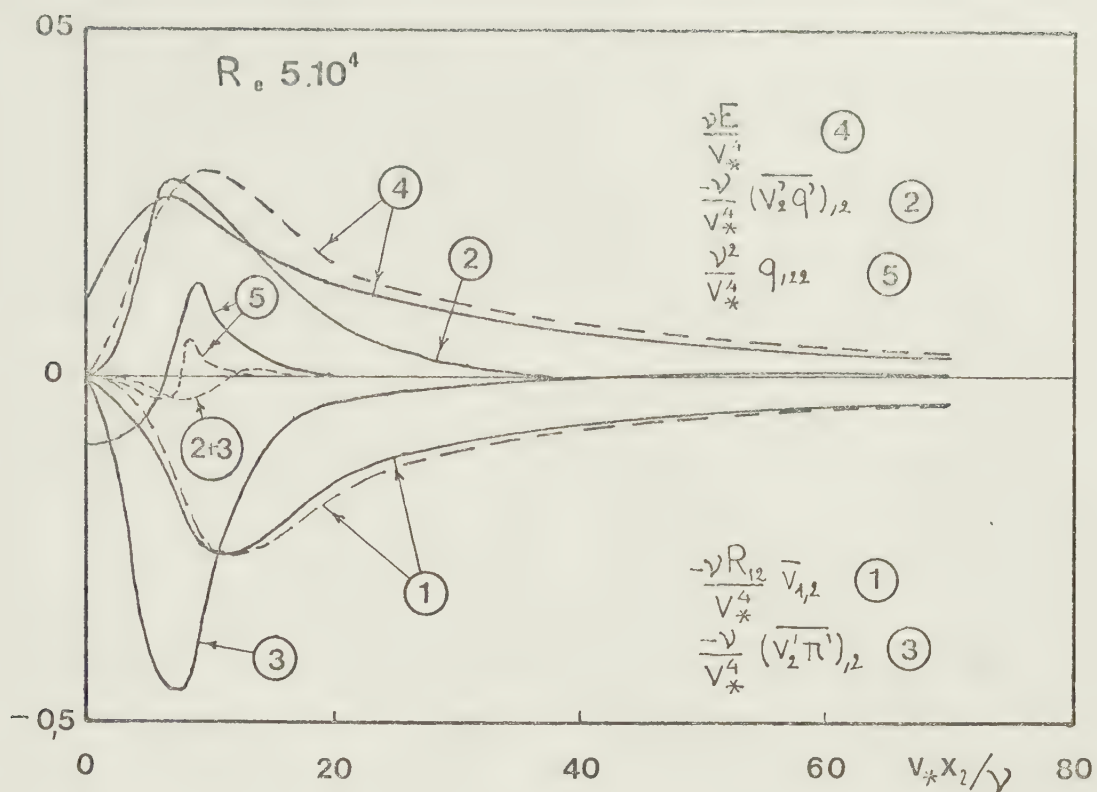


FIG 12 BILAN D'ENERGIE TURBULENTE DANS UN TUBE CIRCULAIRE (MODELE SIMPLIFIE)

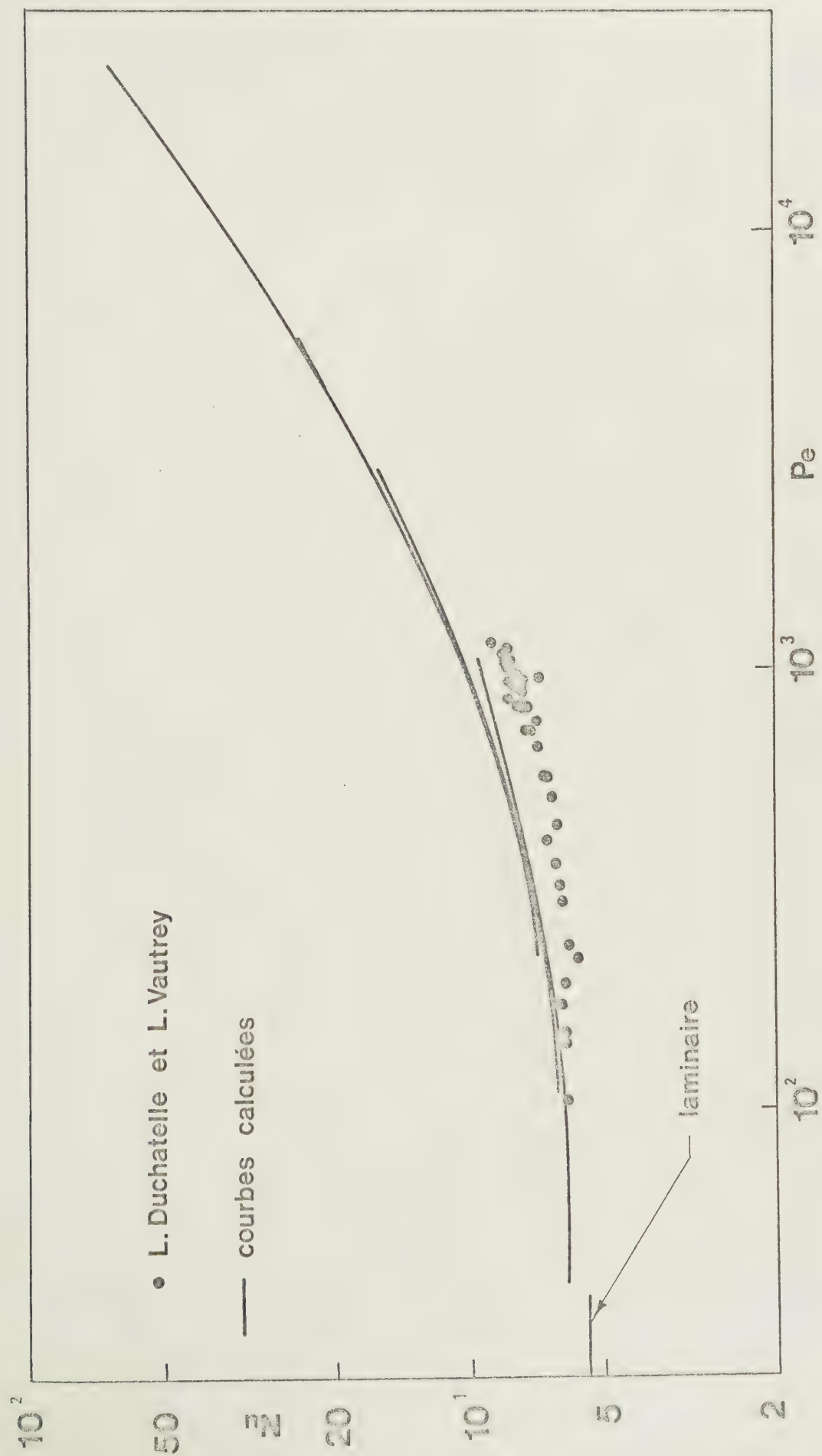


FIG 13 TRANSFERT DE CHALEUR PAR METAL LIQUIDE ENTRE DEUX PAROIS PARALLELES

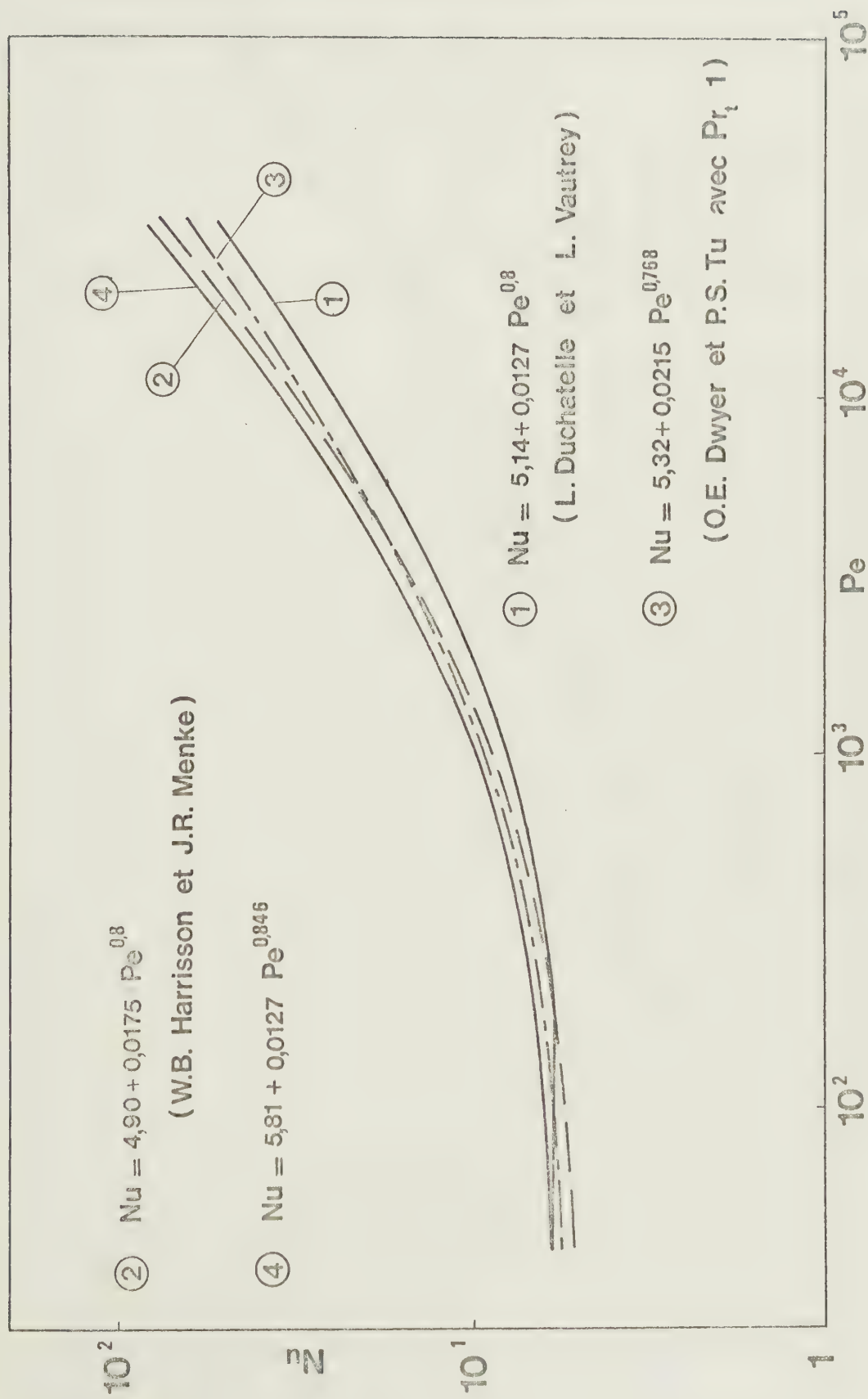


FIG 14 COMPARAISON DES CORRELATIONS DE TRANSFERT DE CHALEUR PAR METAL LIQUIDE
ENTRE DEUX PAROIS PARALLELES

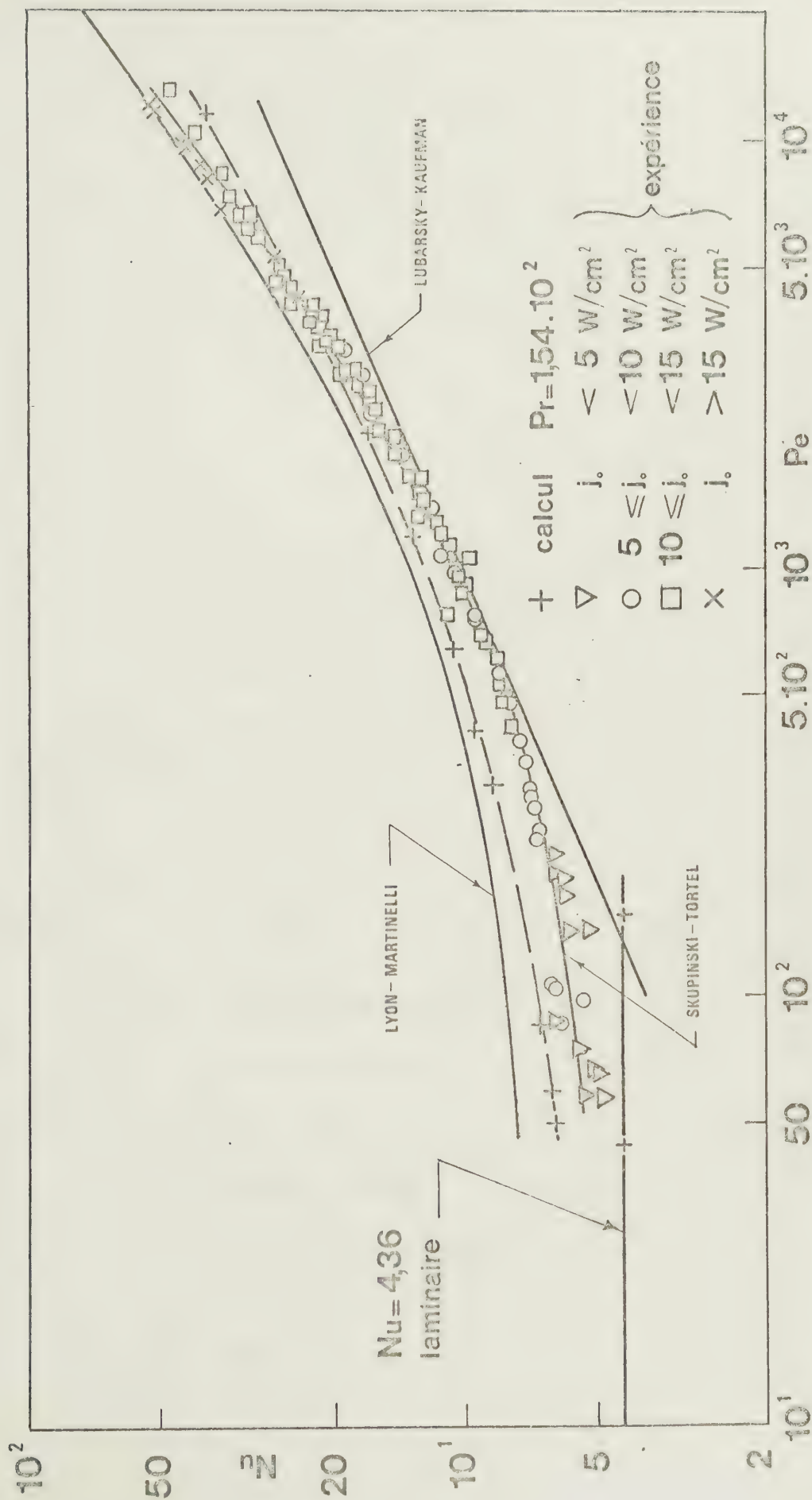
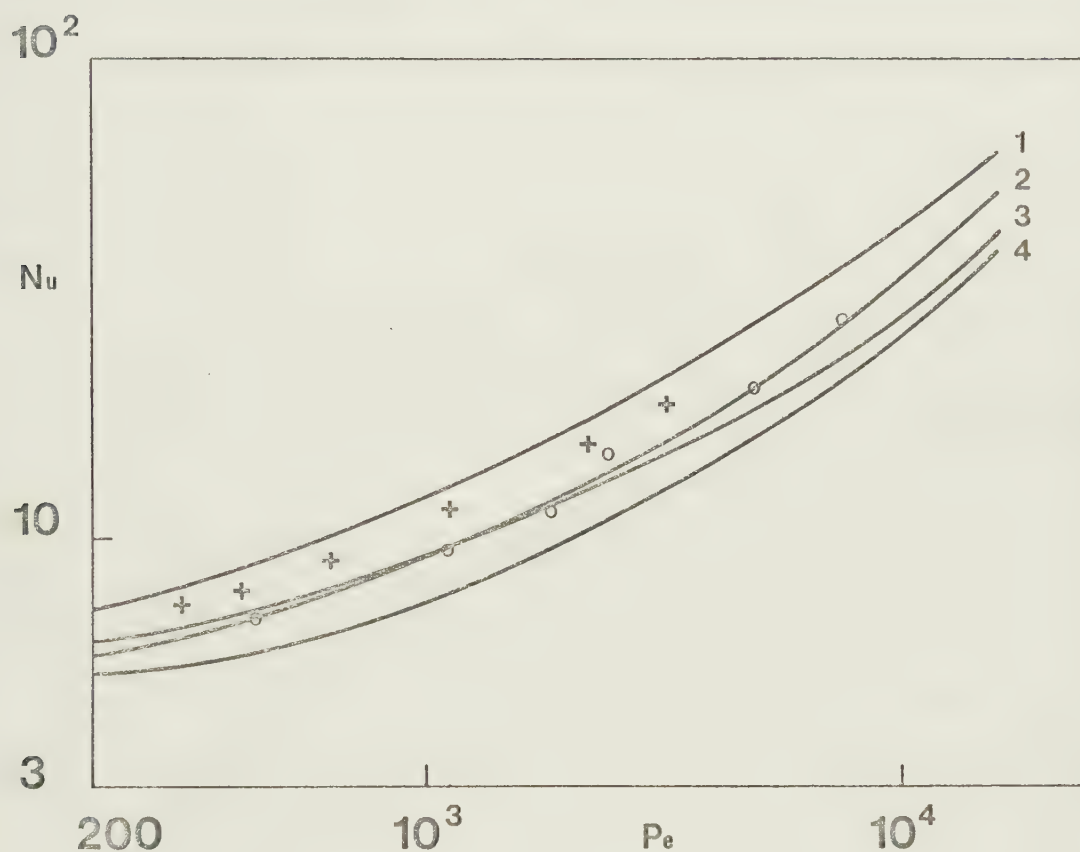


FIG 15 COMPARAISON DES CORRELATIONS DE TRANSFERT DE CHALEUR PAR METAL LIQUIDE DANS UN TUBE CIRCULAIRE



- 1 Seban , Shimazaki
- 2 Notter , Sleicher
- 3 Azer , Chao
- 4 Sleicher , Tribus
- o Sleicher , Awada , Notter
- + calcul

FIG 16 TRANSFERT DE CHALEUR A TEMPERATURE DE PAROI
CONSTANTE DANS UN TUBE CIRCULAIRE ET COMPARAISON
AVEC LES CORRELATIONS CLASSIQUES

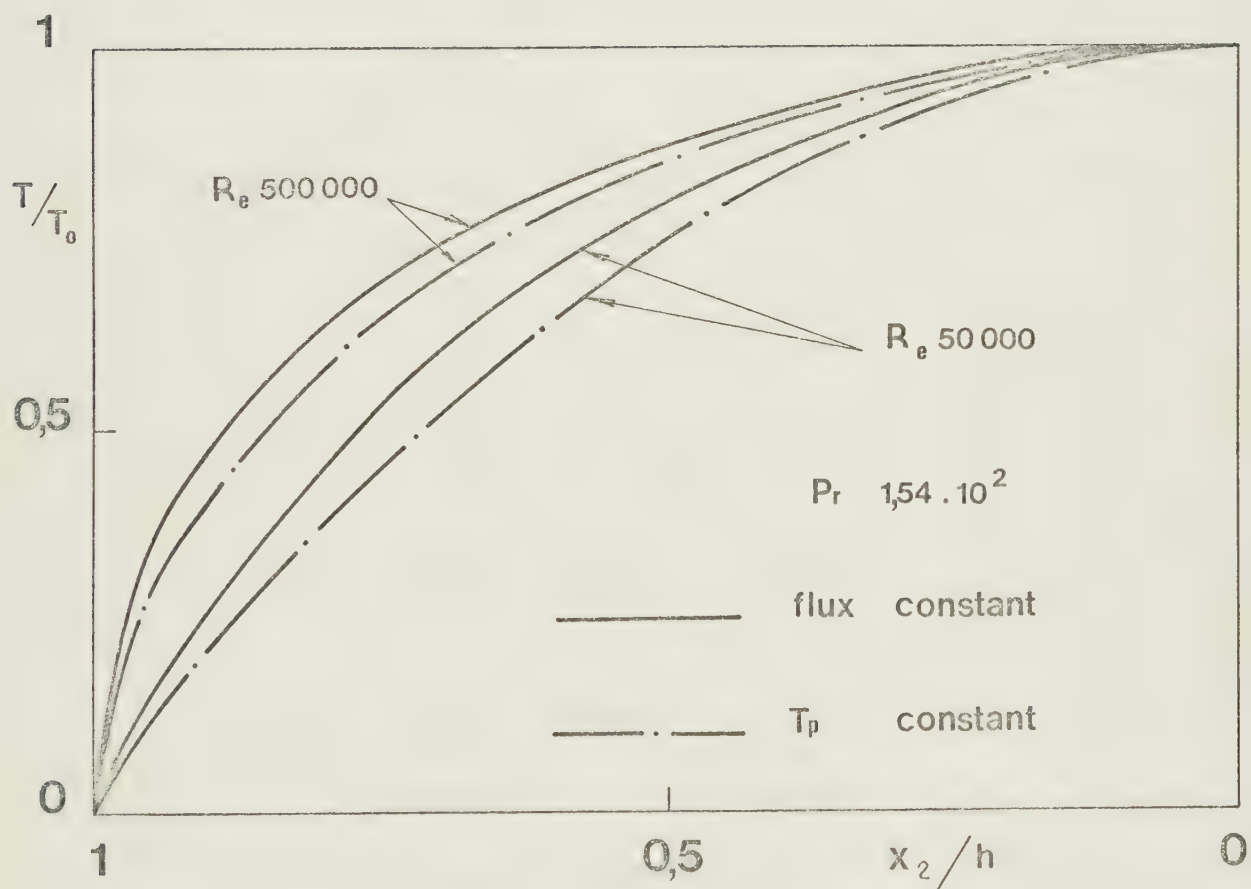
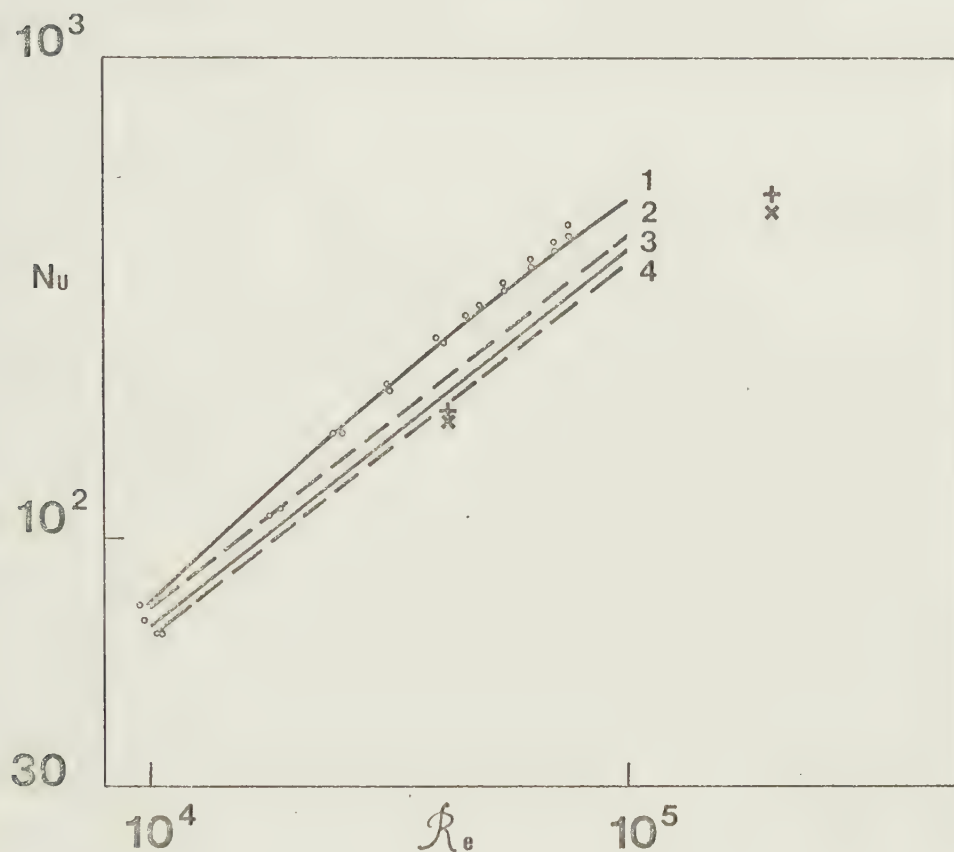


FIG 17 INFLUENCE DES CONDITIONS A LA PAROI SUR LES PROFILS DE TEMPERATURE DANS UN TUBE CIRCULAIRE (MODELE SIMPLIFIE)



1 Friend , Metzner $Pr = 6,8$

2 Colburn $Pr = 6,8$

3 Friend , Metzner $Pr = 4,6$

4 Colburn $Pr = 4,6$

• Skupinski , Tortel , Vautrey $4,6 < Pr < 6,8$

+ calcul $Pr = 6,8$

x calcul $Pr = 4,6$

FIG 18 PRÉVISIONS DU TRANSFERT DE CHALEUR À L'EAU
DANS UN TUBE CIRCULAIRE (MODÈLE SIMPLIFIÉ)

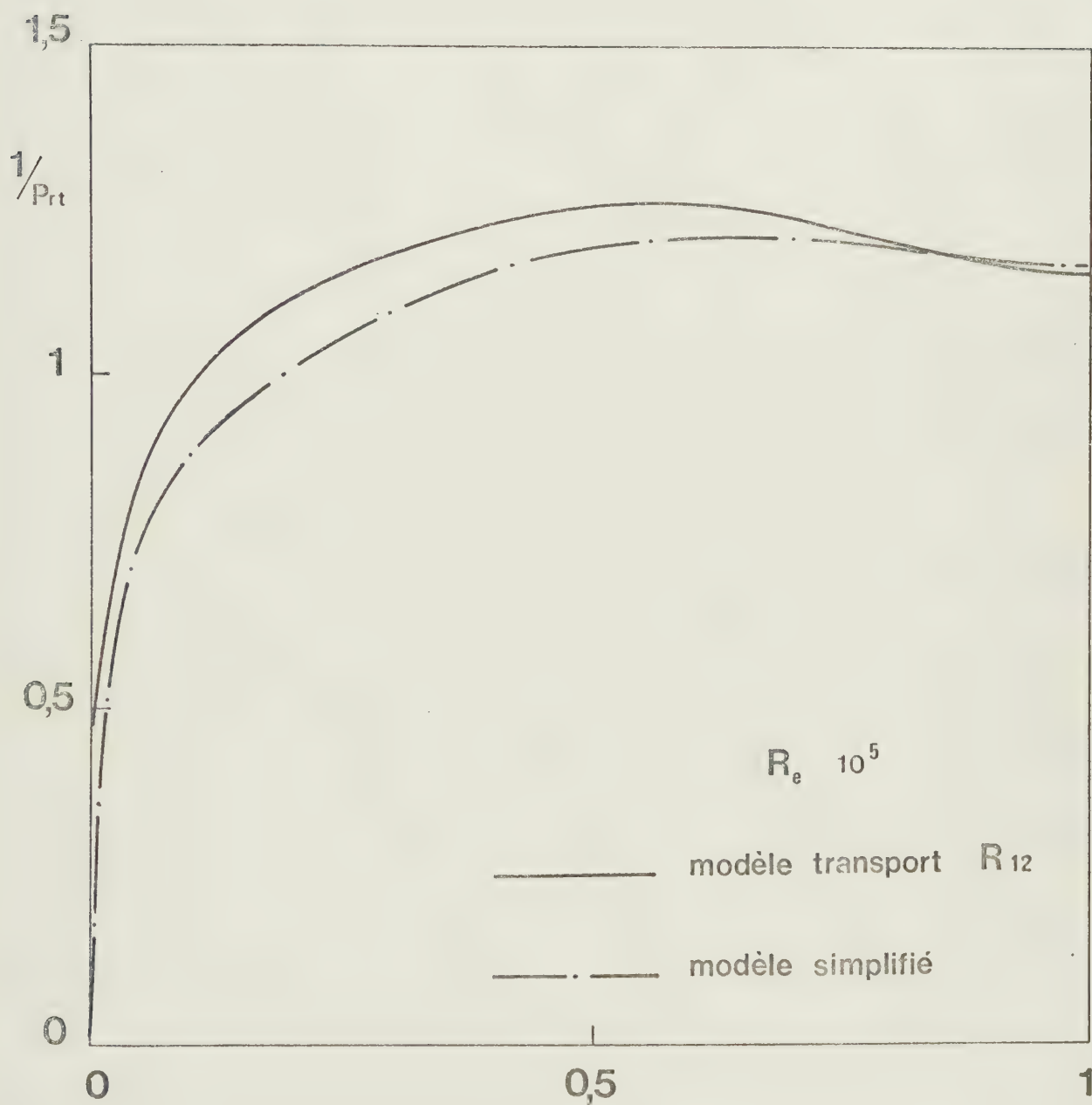


FIG 19 PREVISION DU NOMBRE DE PRANDTL TURBULENT
DANS UN TUBE CIRCULAIRE

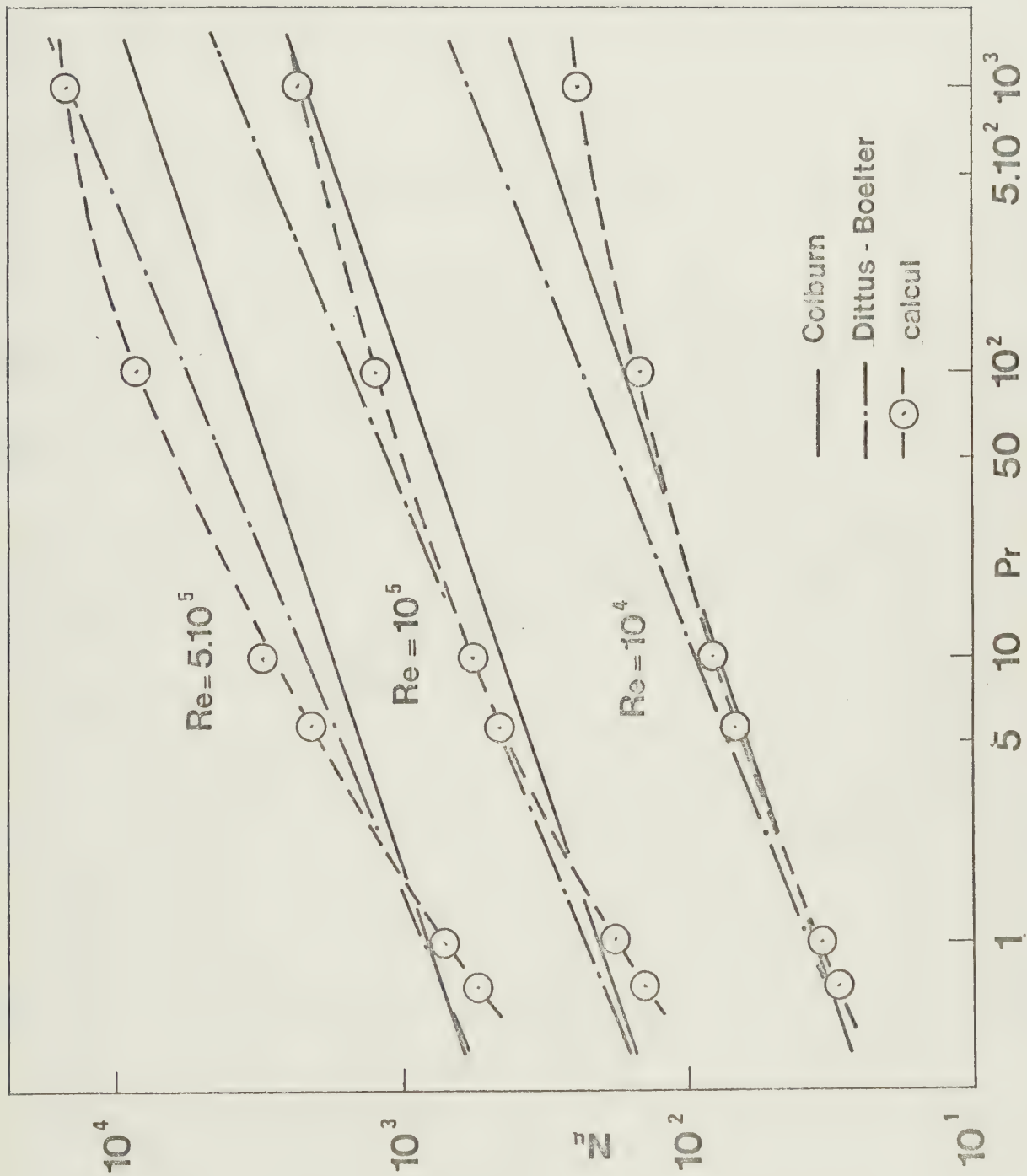


FIG 20 TRANSFERT DE CHALEUR EN FONCTION DU NOMBRE DE PRANDTL DANS UN TUBE CIRCULAIRE
(MODELE DE TRANSPORT DE LA CONTRAINTE DE CISAILLEMENT TURBULENT)

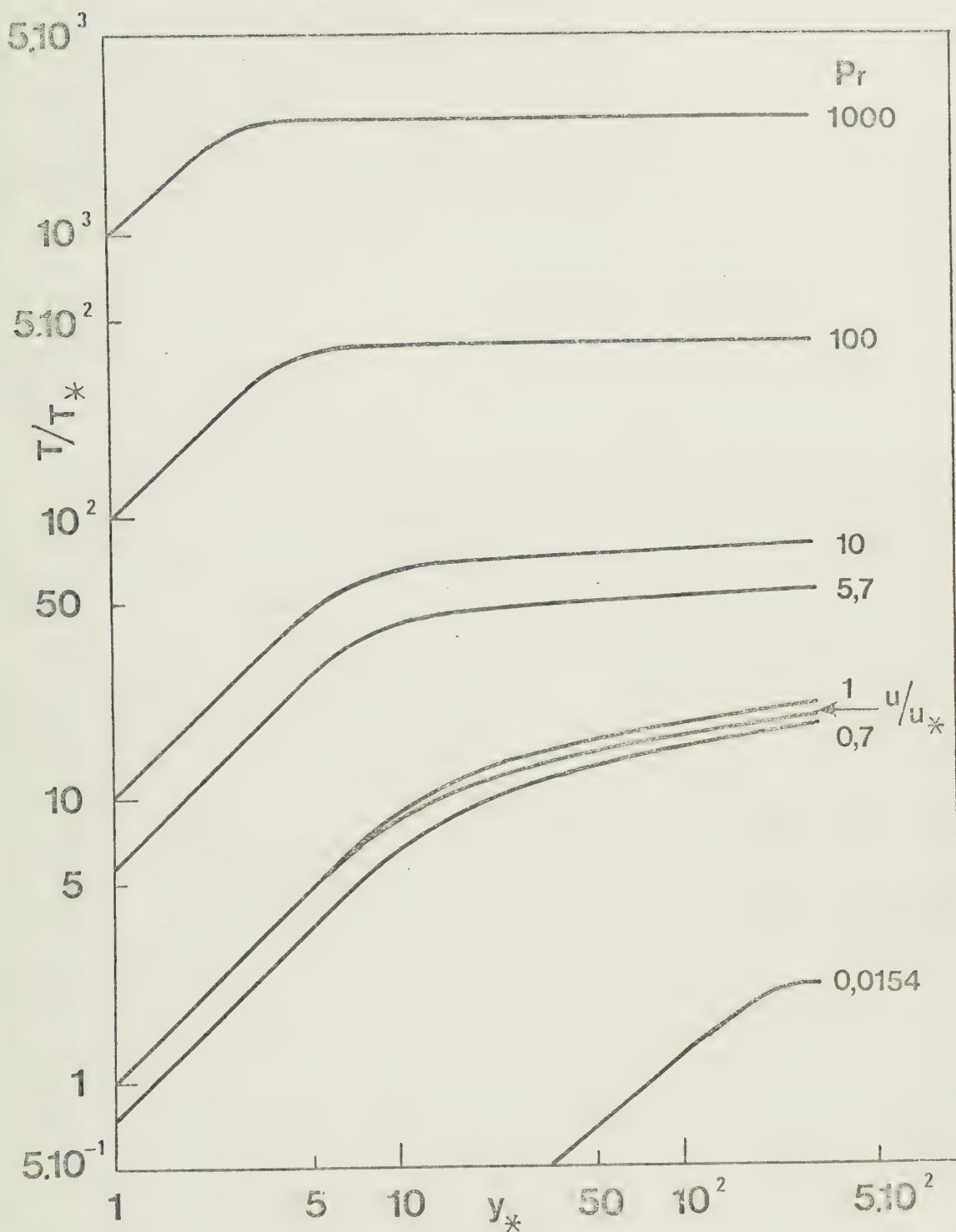


FIG 21 PROFILS DE TEMPERATURE EN FONCTION DU NOMBRE DE PRANDTL MOLECULAIRE DANS UN TUBE CIRCULAIRE (MODELE DE TRANSPORT DE LA CONTRAINTE DE CISAILLEMENT TURBULENT)

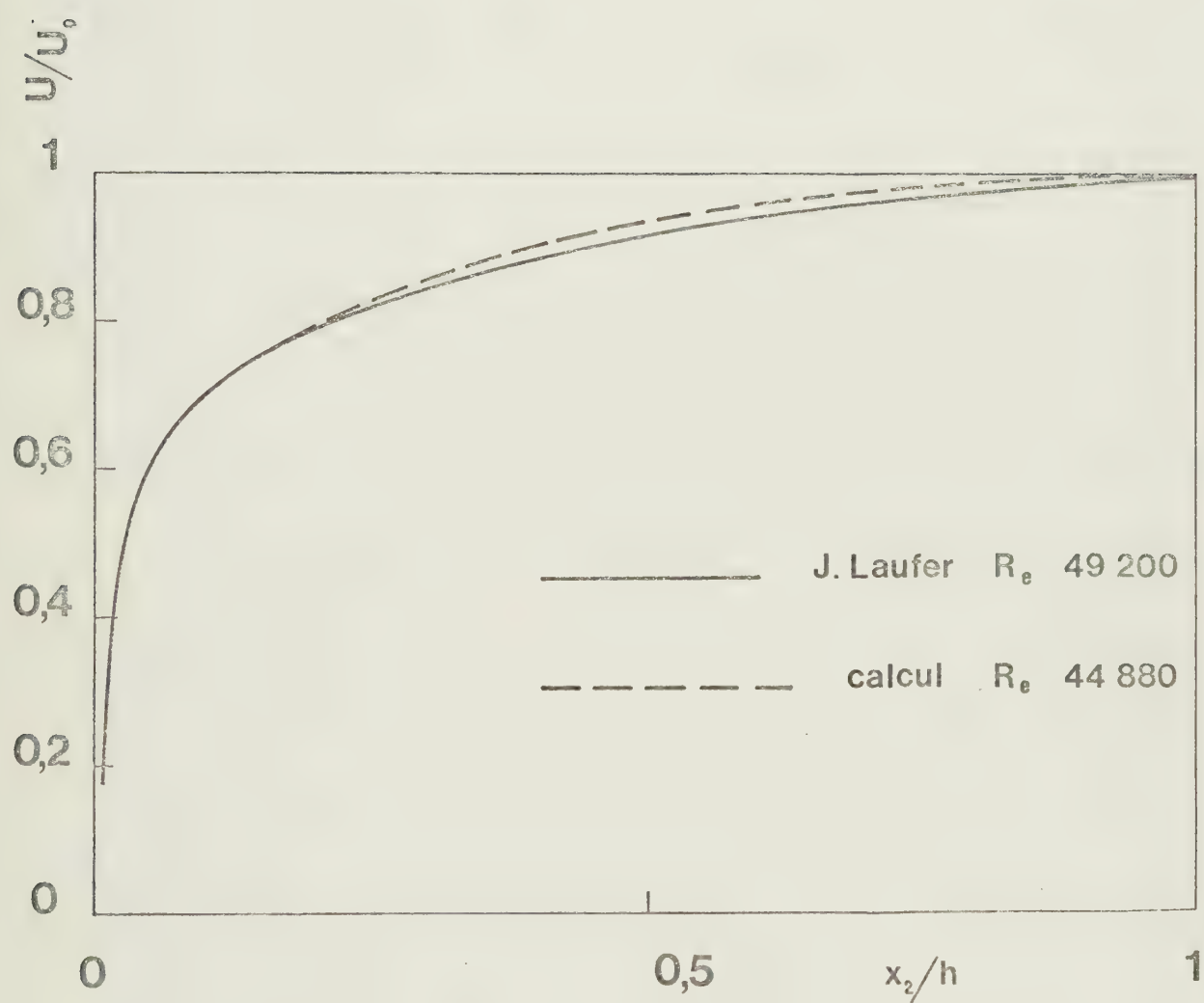


FIG 22 PROFILS DE VITESSE MOYENNE DANS L'ECOULEMENT
ENTRE PIAQUES PLANES (MODELE COMPLET)

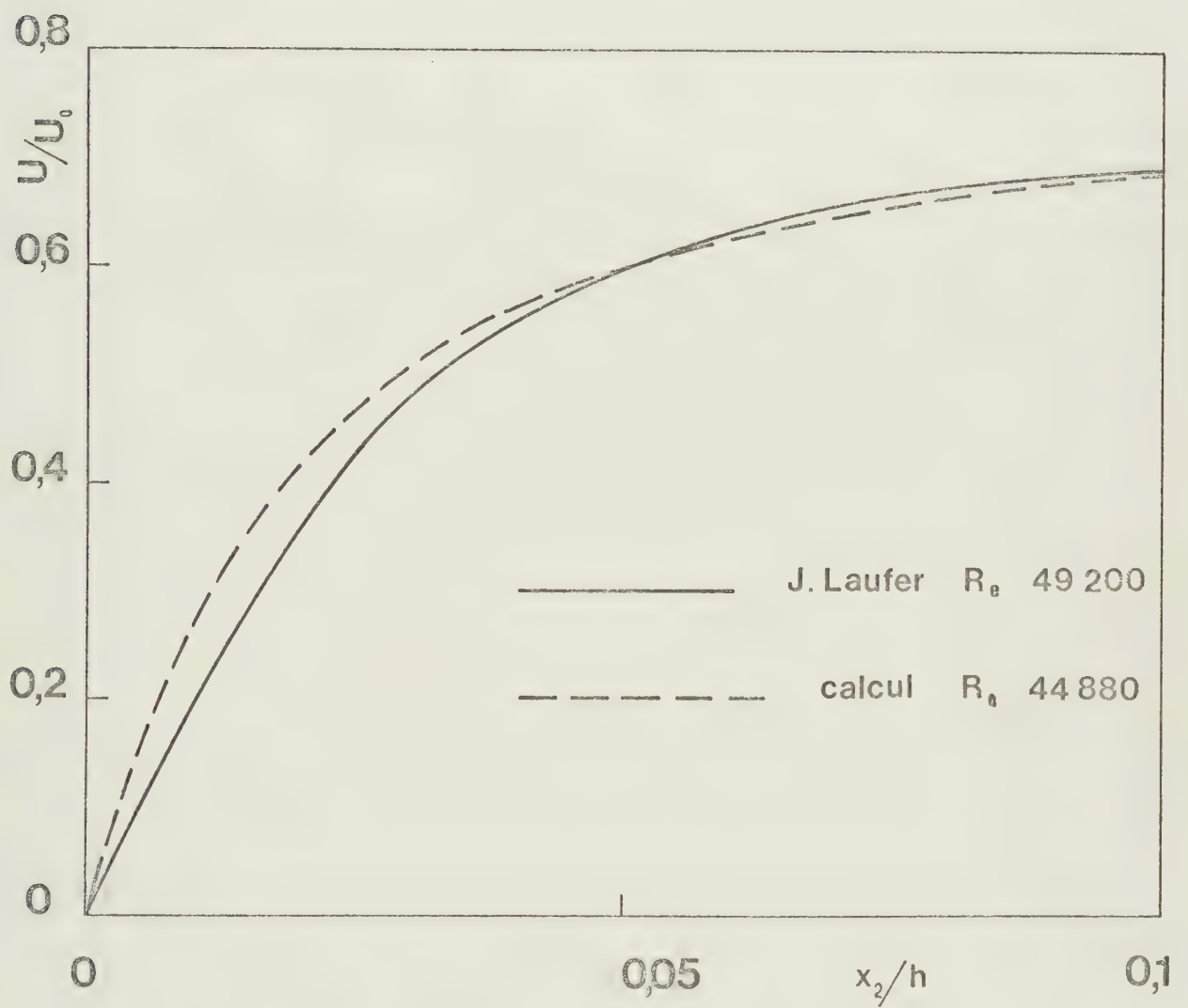


FIG 23 PROFILS DE VITESSE PRES DE LA PAROI DANS L'ECOULEMENT ENTRE PLAQUES PLANES (MODELE COMPLET)

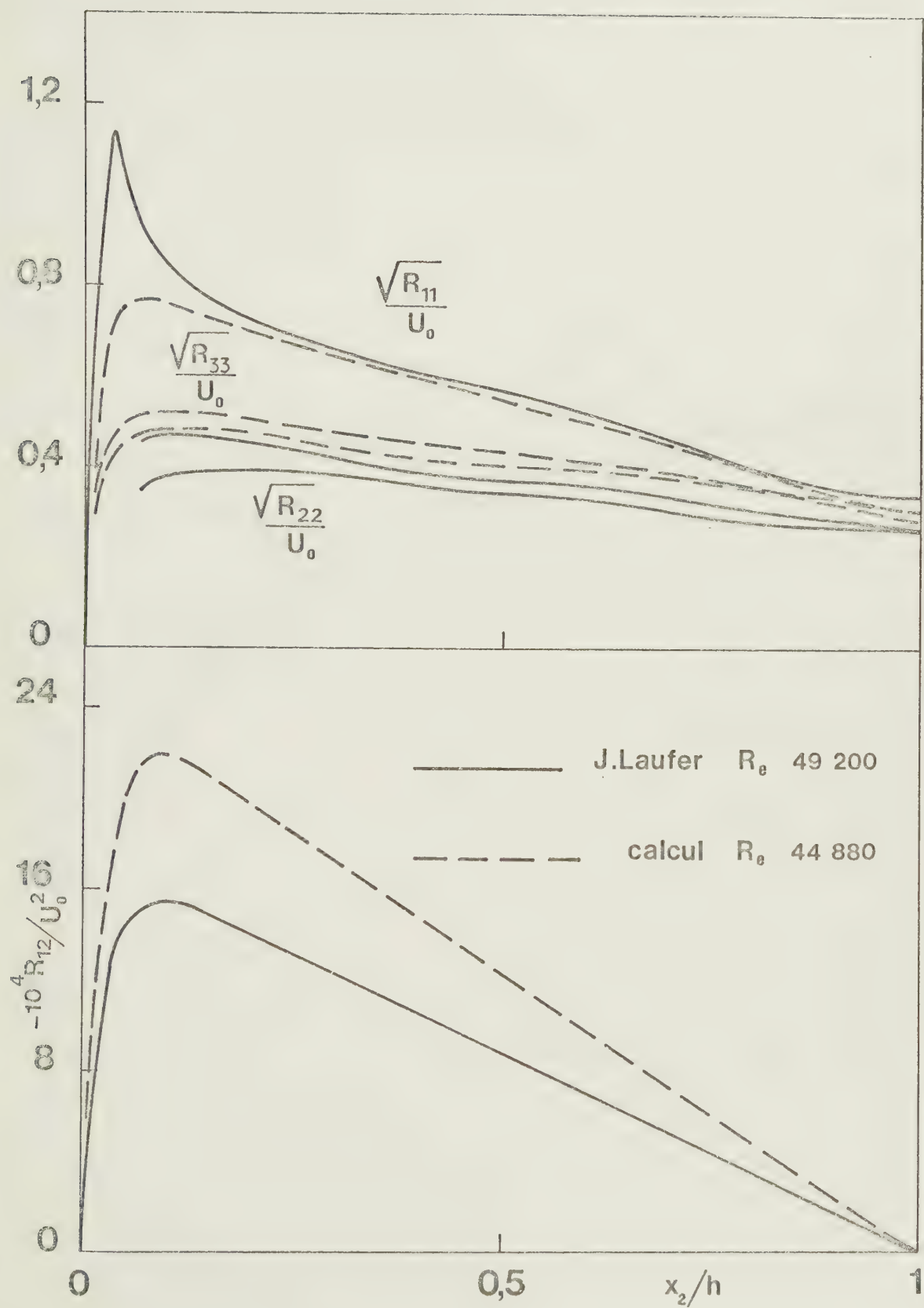


FIG 24 CORRELATIONS DOUBLES DE VITESSE DANS L'ÉCOULEMENT ENTRE PLAQUES PLANES (MODÈLE COLETT)

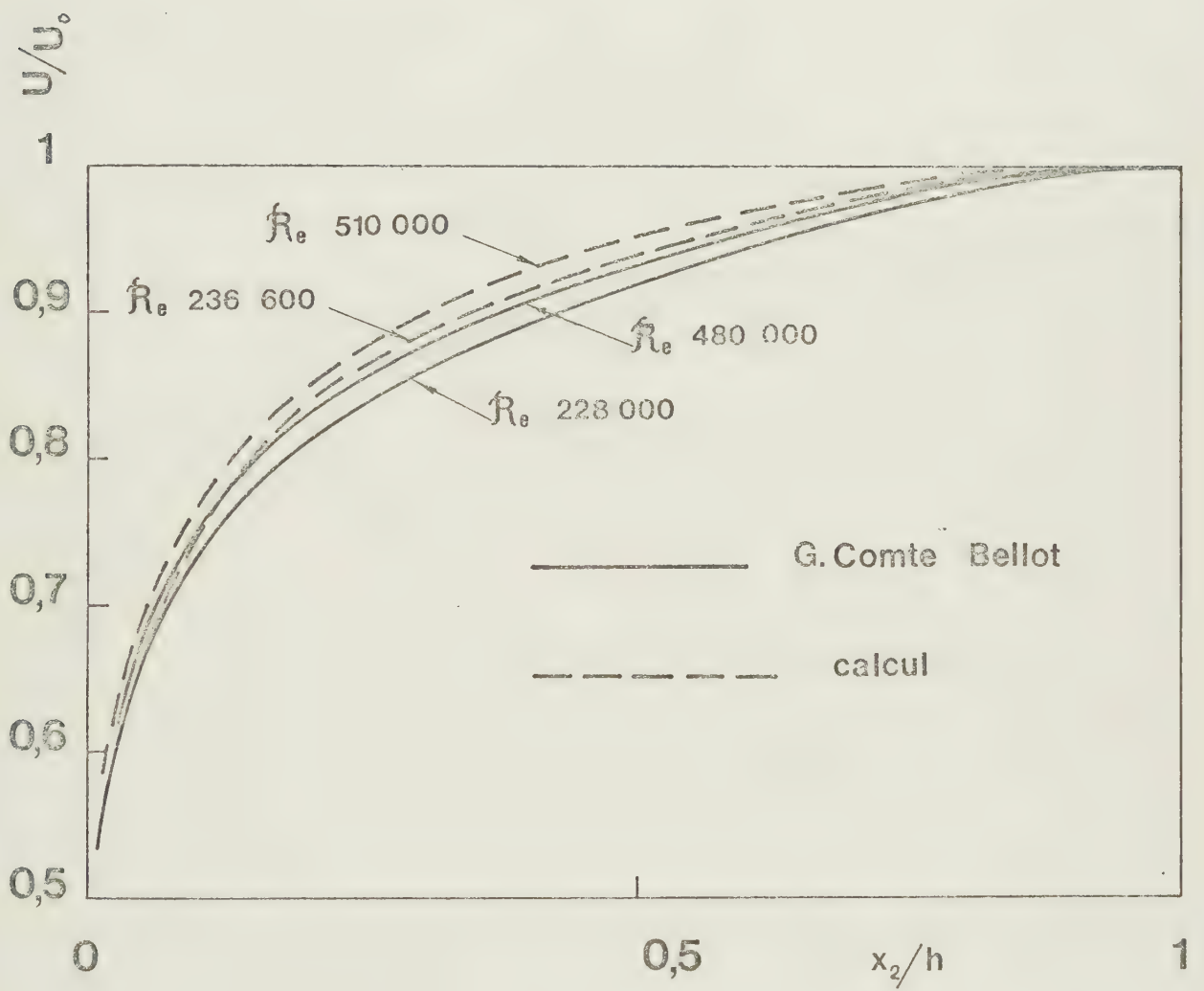


FIG 25 PROFILS DE VITESSE MOYENNE DANS L'ÉCOULEMENT
ENTRE PLAQUES PLANES (MODÈLE COMPLET)

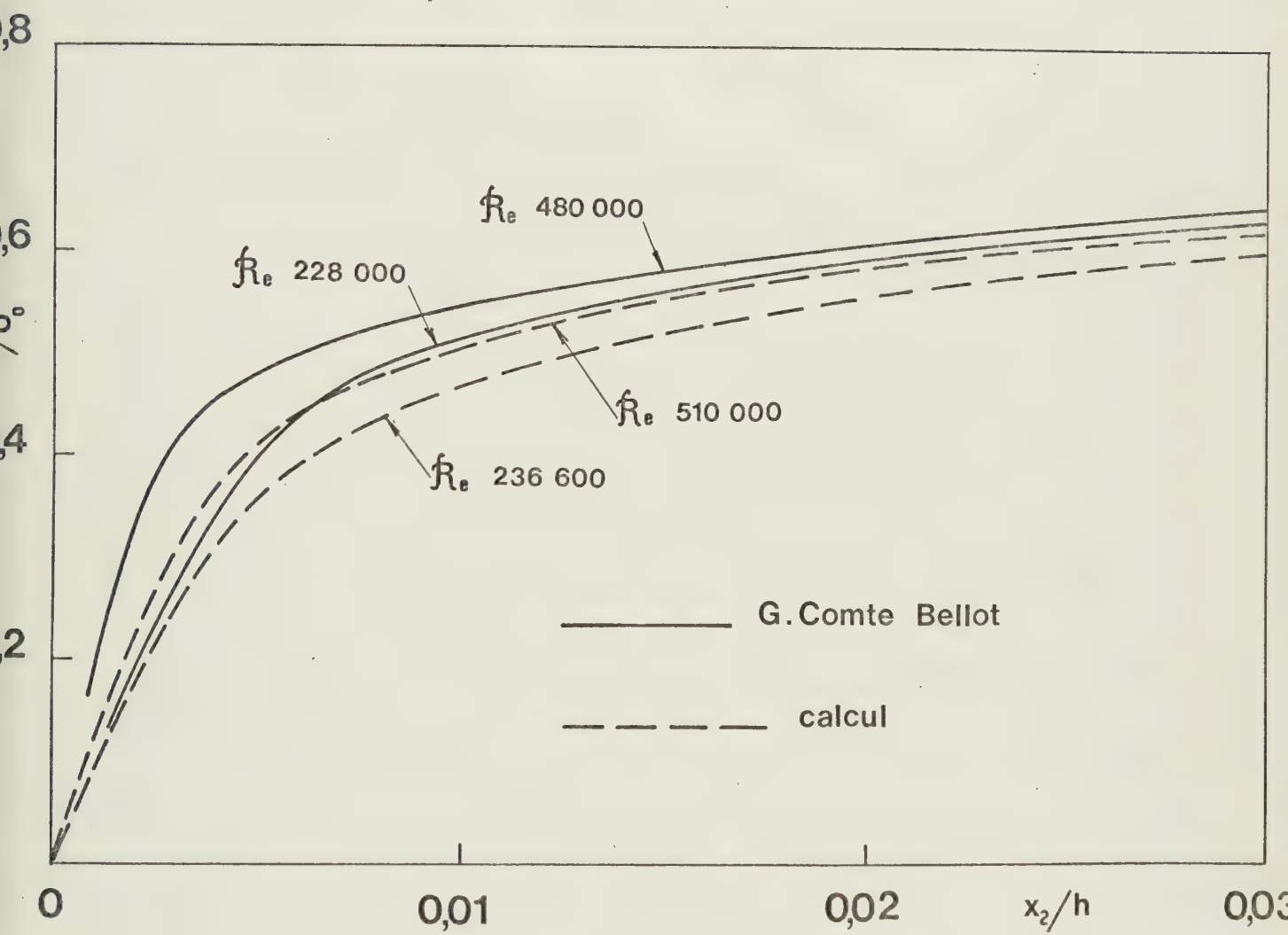


FIG 26 PROFIL DE VITESSE PRES DE LA PAROI DANS L'ECOULEMENT ENTRE PLAQUES PLANES (MODELE COMPLET)

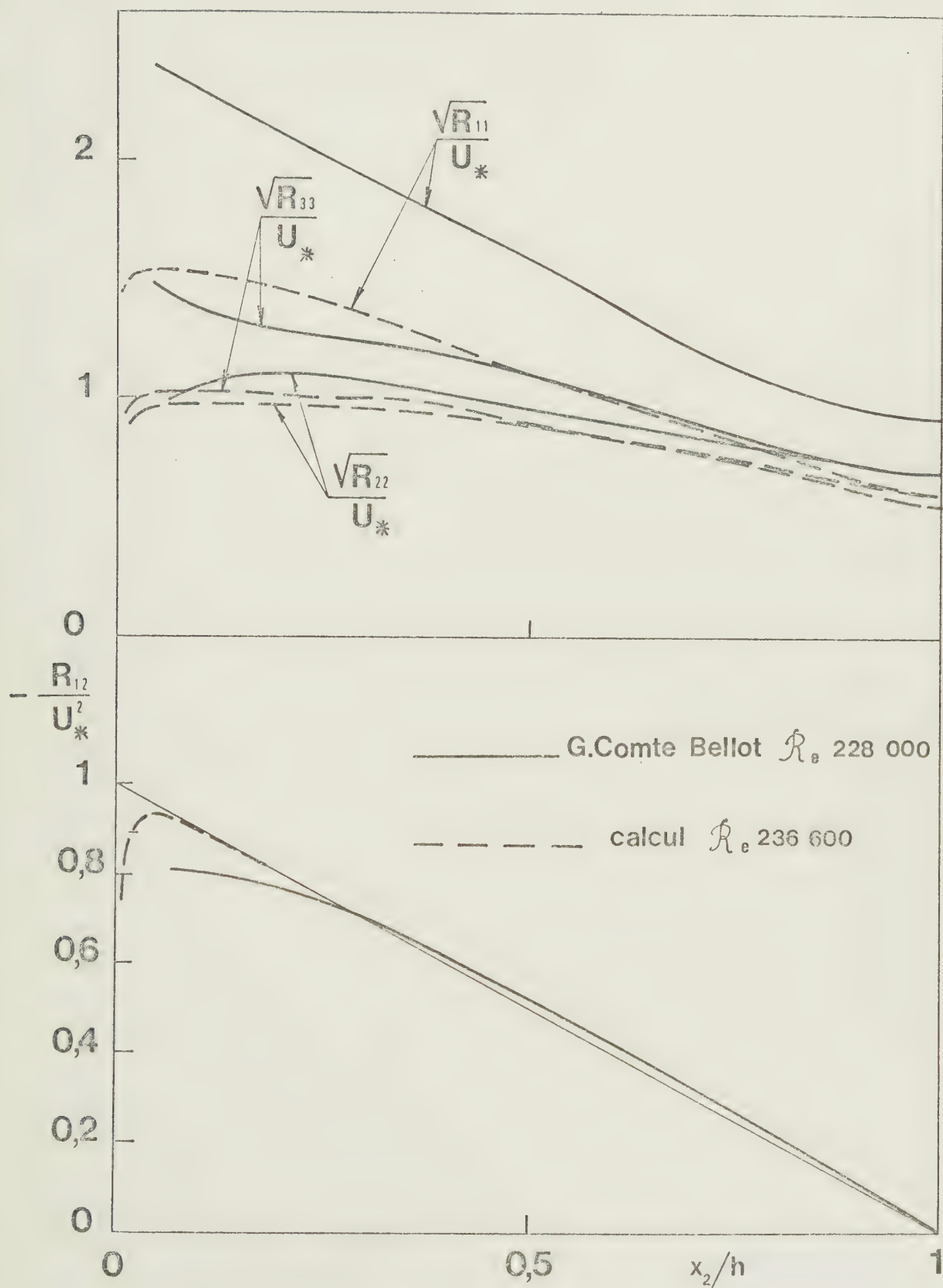


FIG 27 CORRELATIONS DOUBLES DE VITESSE DANS L'ÉCOULEMENT ENTRE PLAQUES PLANES (MODÈLE COMPLET)

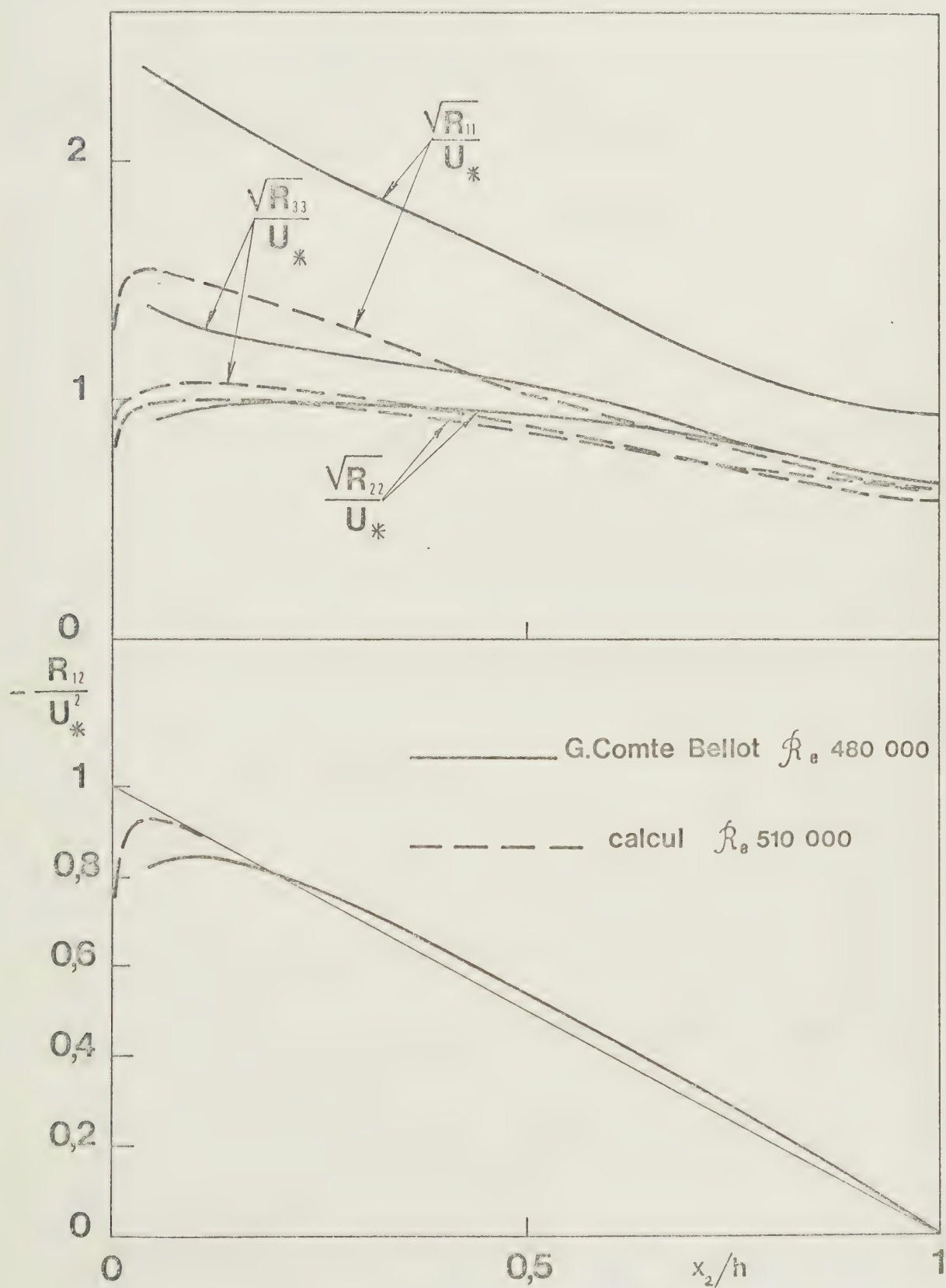


FIG 28 CORRELATIONS DOUBLES DE VITESSE DANS L'ECOULEMENT ENTRE PLAQUES PLANES (MODELE COMPLET)

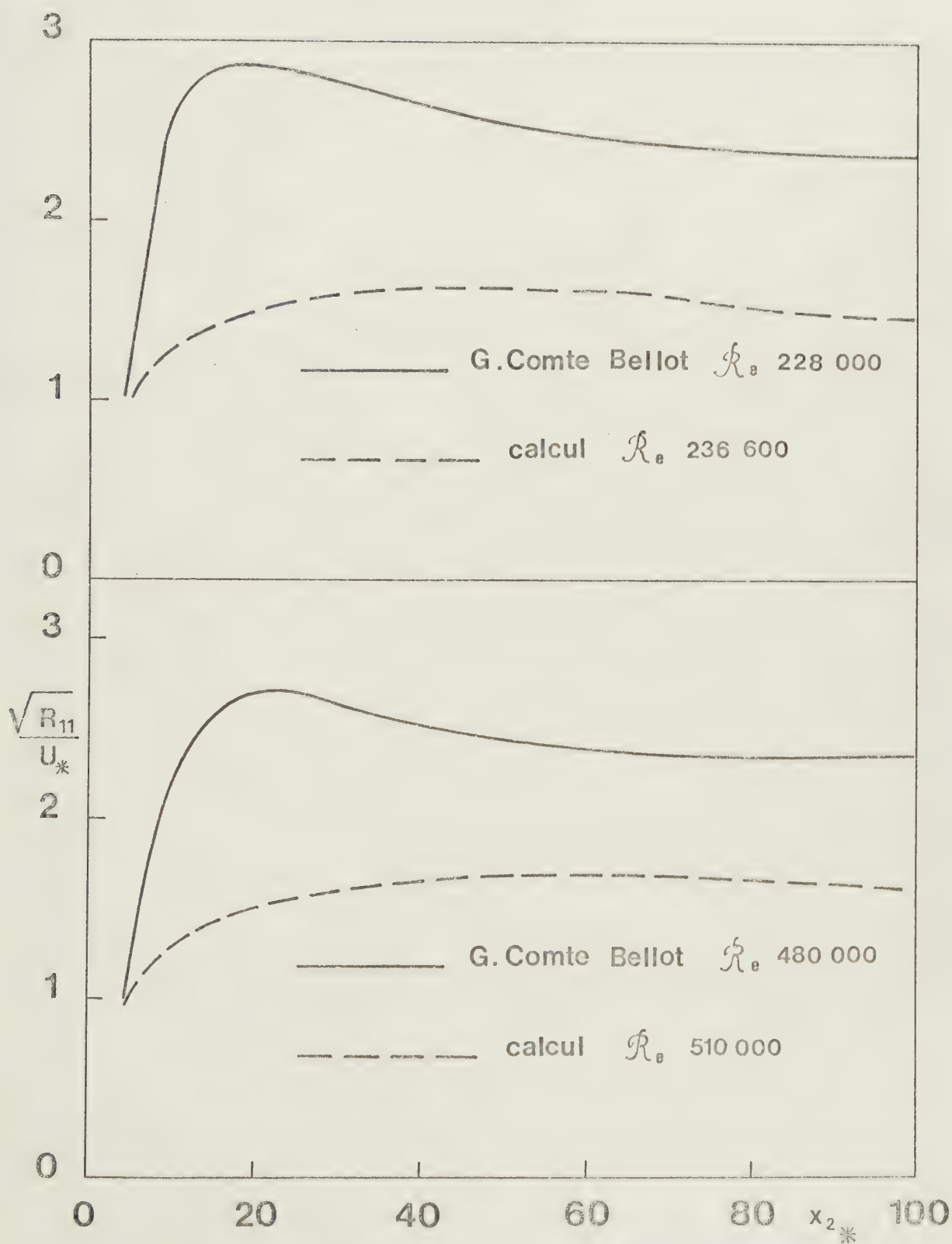


FIG 29 CORRELATION R_{11} PRES DE LA PAROI DANS L'ECOULEMENT
ENTRE PLAQUES PLANES

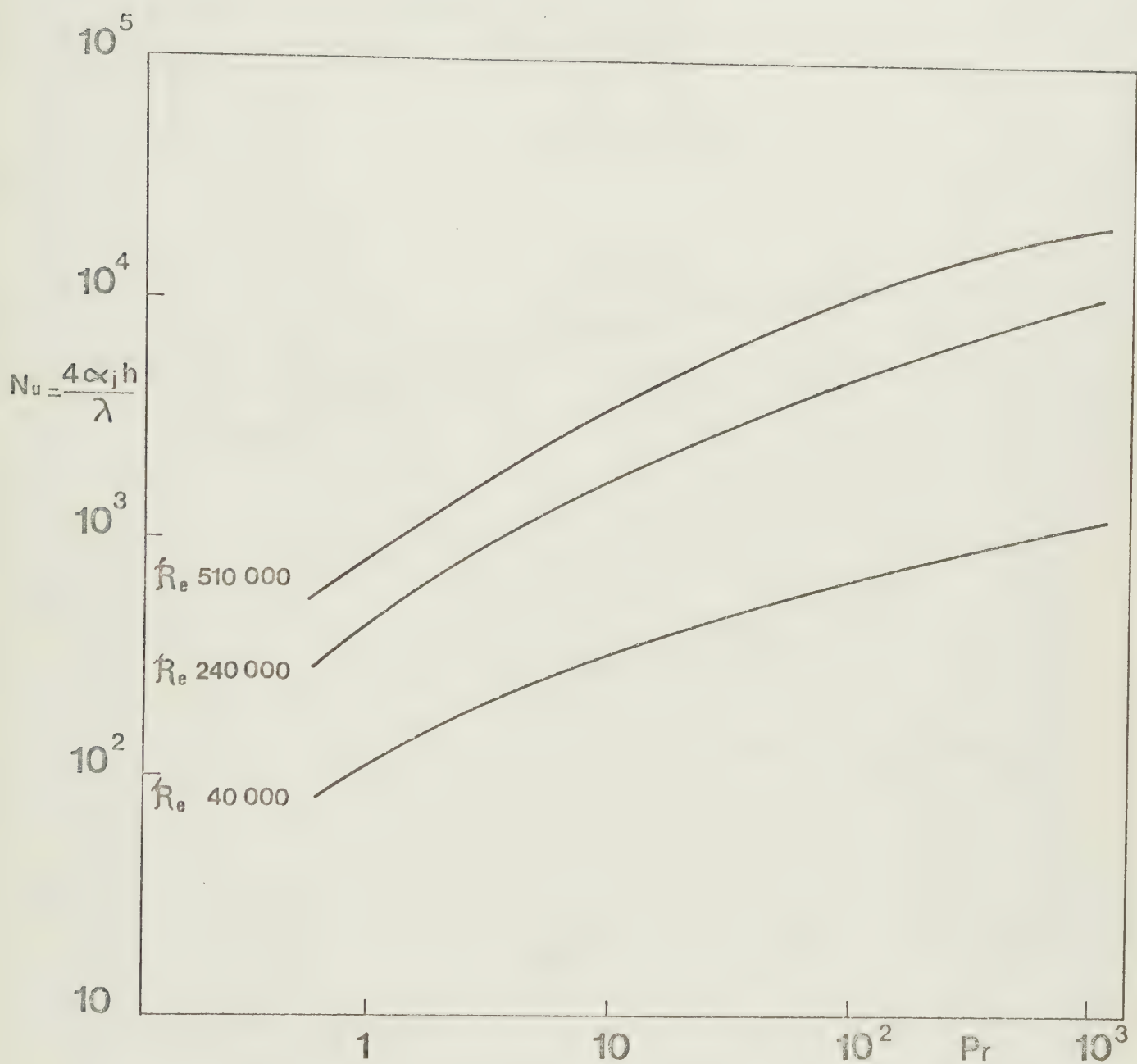


FIG 30 TRANSFERT DE CHALEUR EN FONCTION DU NOMBRE DE PRANDTL MOLECULAIRE DANS L'ECOULEMENT ENTRE PLAQUES PLANES (MODELE COMPLET)

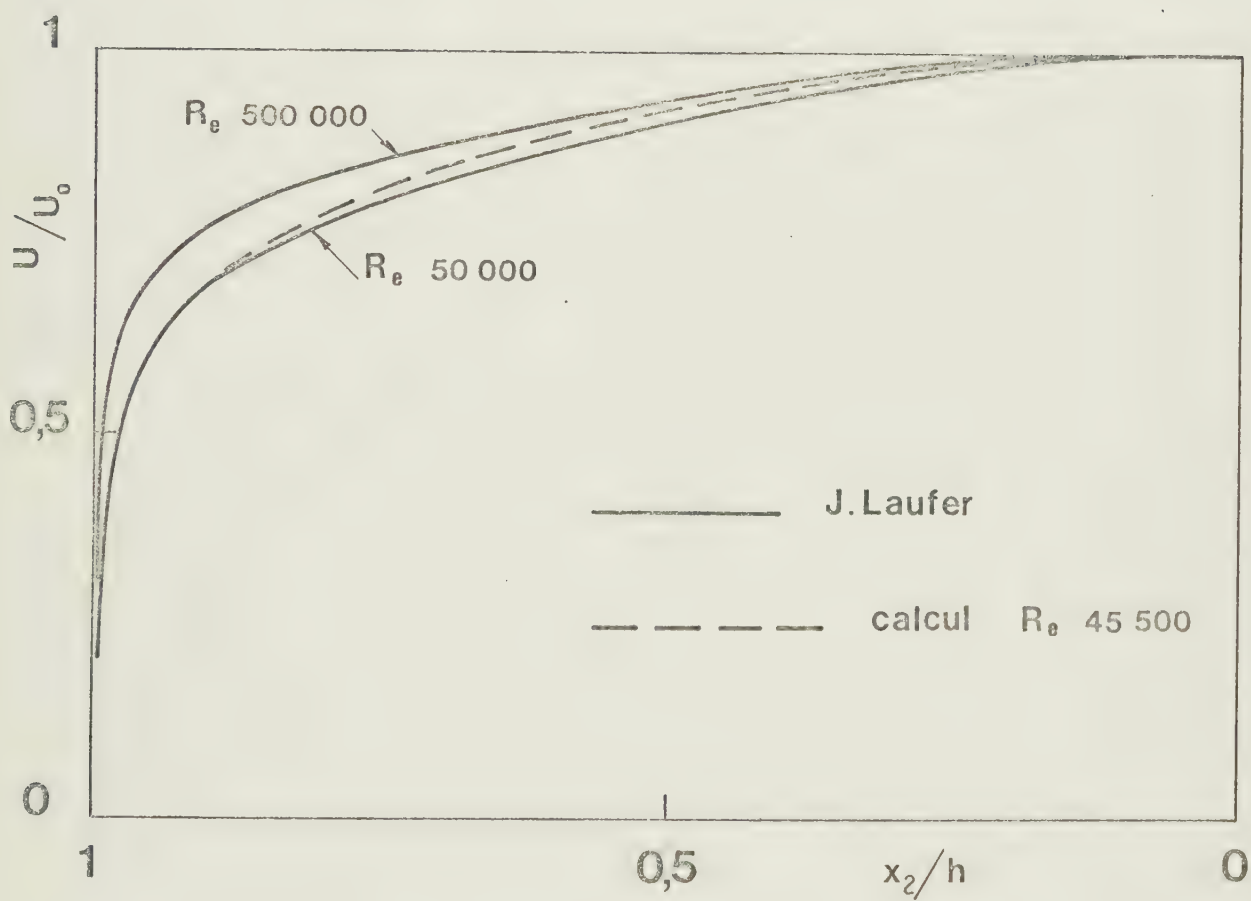


FIG 31 PROFIL DE VITESSE MOYENNE DANS UN TUBE CIRCULAIRE
(MODELE COMPLET)

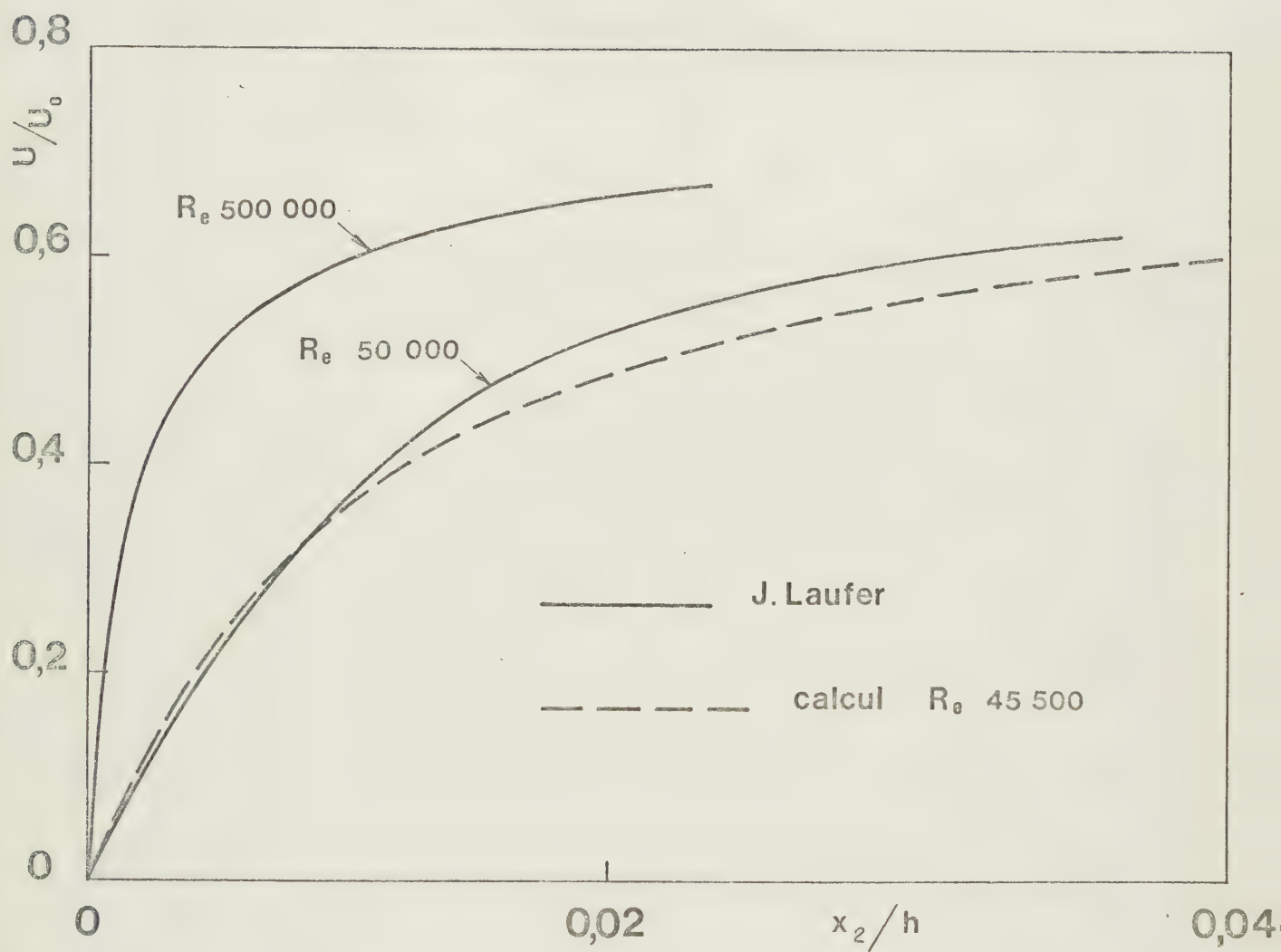


FIG 32 VITESSE MOYENNE PRÈS DE LA PAROI DANS UN TUBE CIRCULAIRE
(MODÈLE COMPLET)

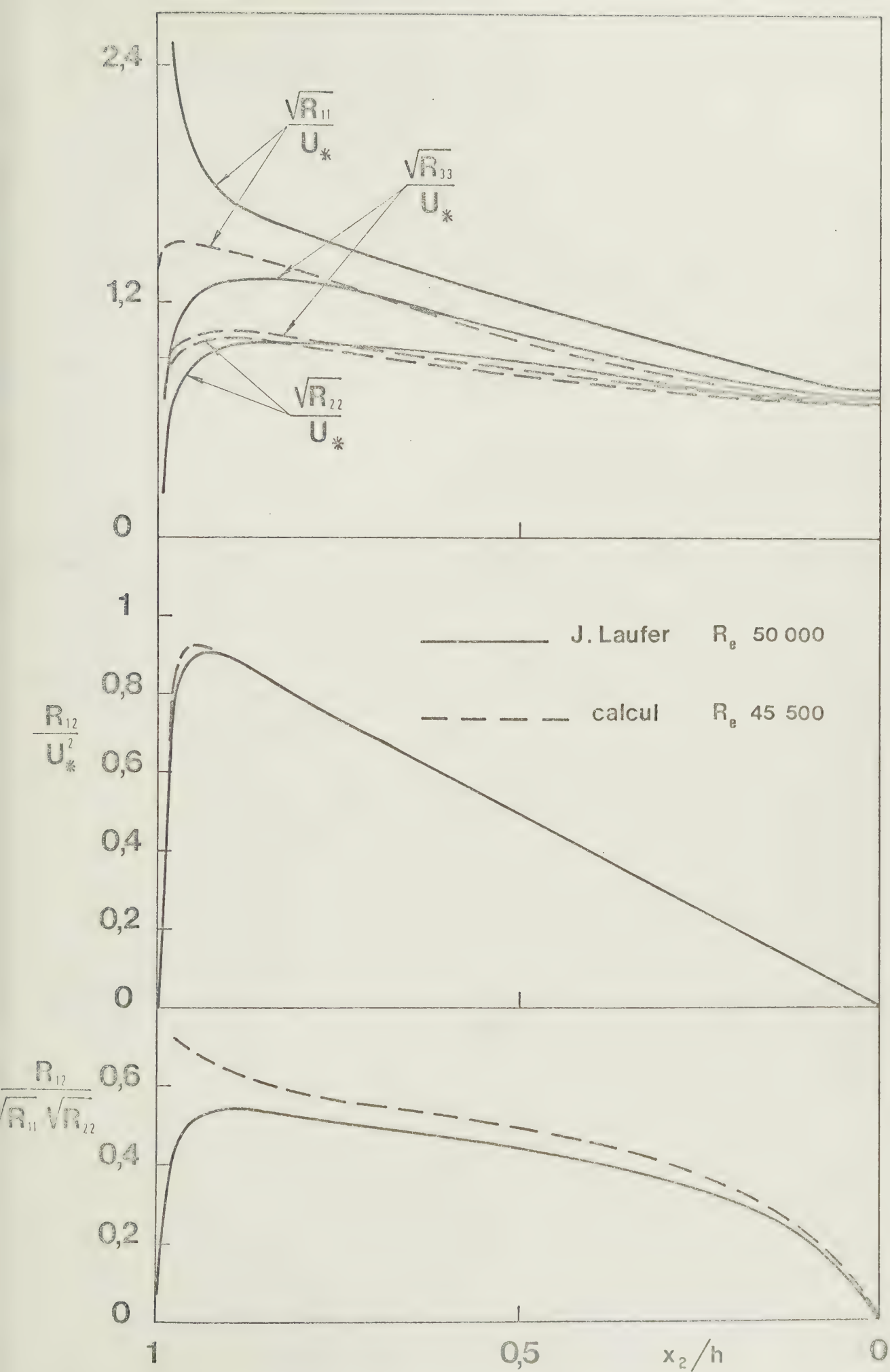


FIG. 33 CORRELATIONS DOUBLES DE VITESSE DANS UN TUBE CIRCULAIRE (MODELE COMPLET)

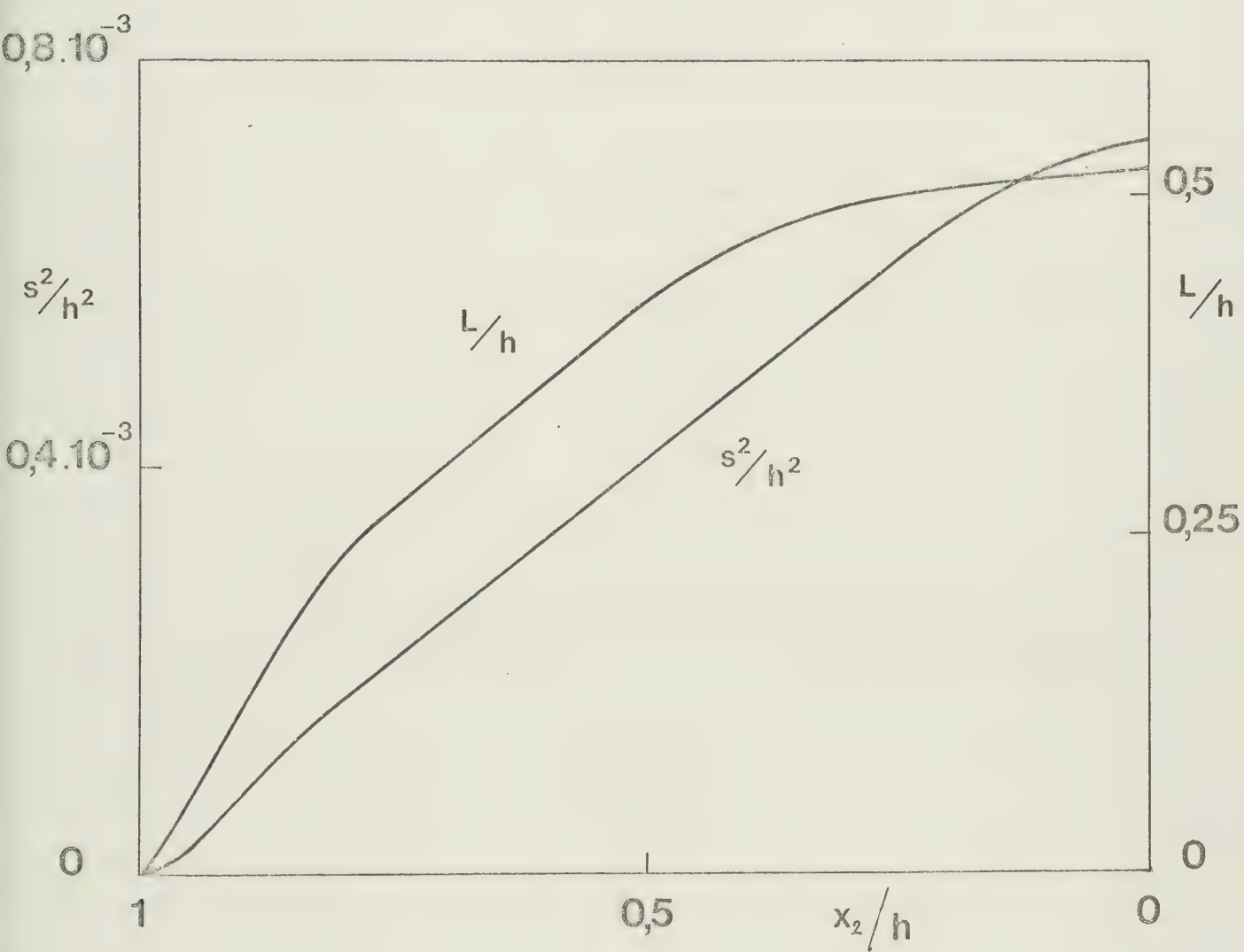


FIG 34 PREVISION DES ECHELLES DE TURBULENCE DANS UN TUBE
CIRCULAIRE ($Re=45500$)

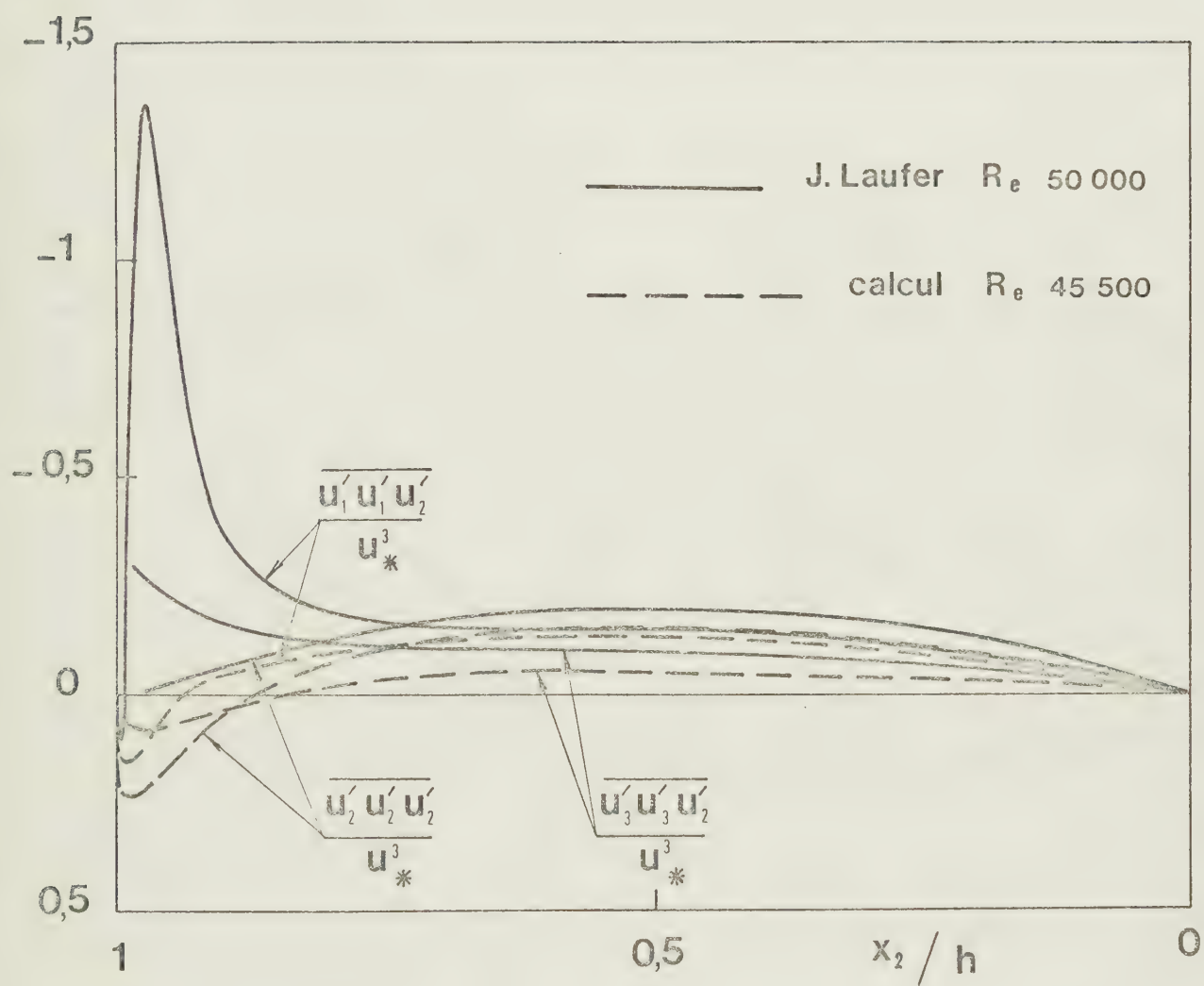


FIG 35 CORRELATIONS TRIPLES DE VITESSE DANS UN TUBE
 CIRCULAIRE (MODELE COMPLET)

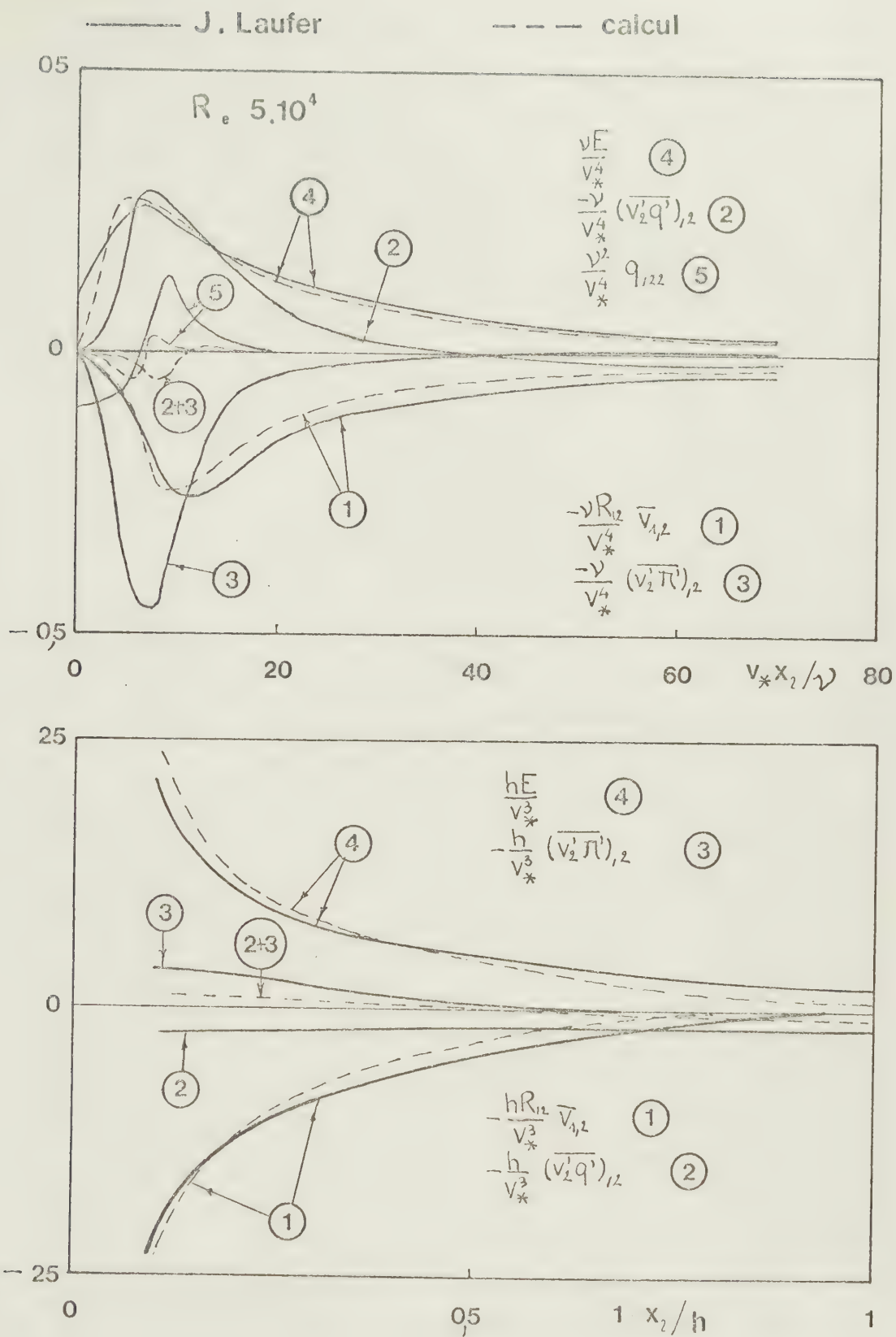


FIG 36 BILAN D'ENERGIE TURBULENTE DANS UN TUBE CIRCULAIRE (MODELE COMPLET)

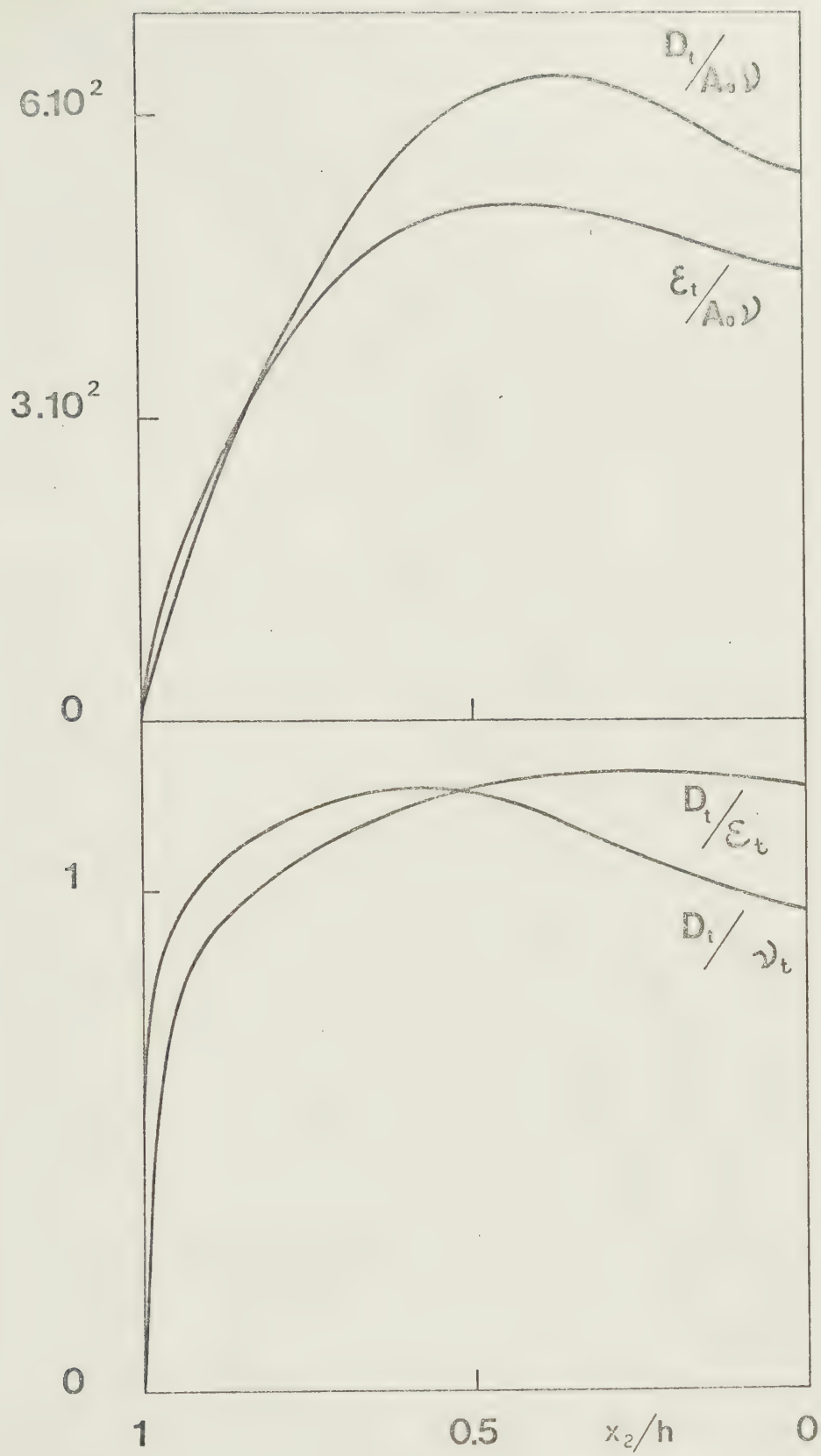


FIG 57 - STABILITÉ DE TURBULENCE EN ÉCOULEMENT TURBULENT DANS UN TUBE CIRCULAIRE. ($\nu = 10^{-6}$)

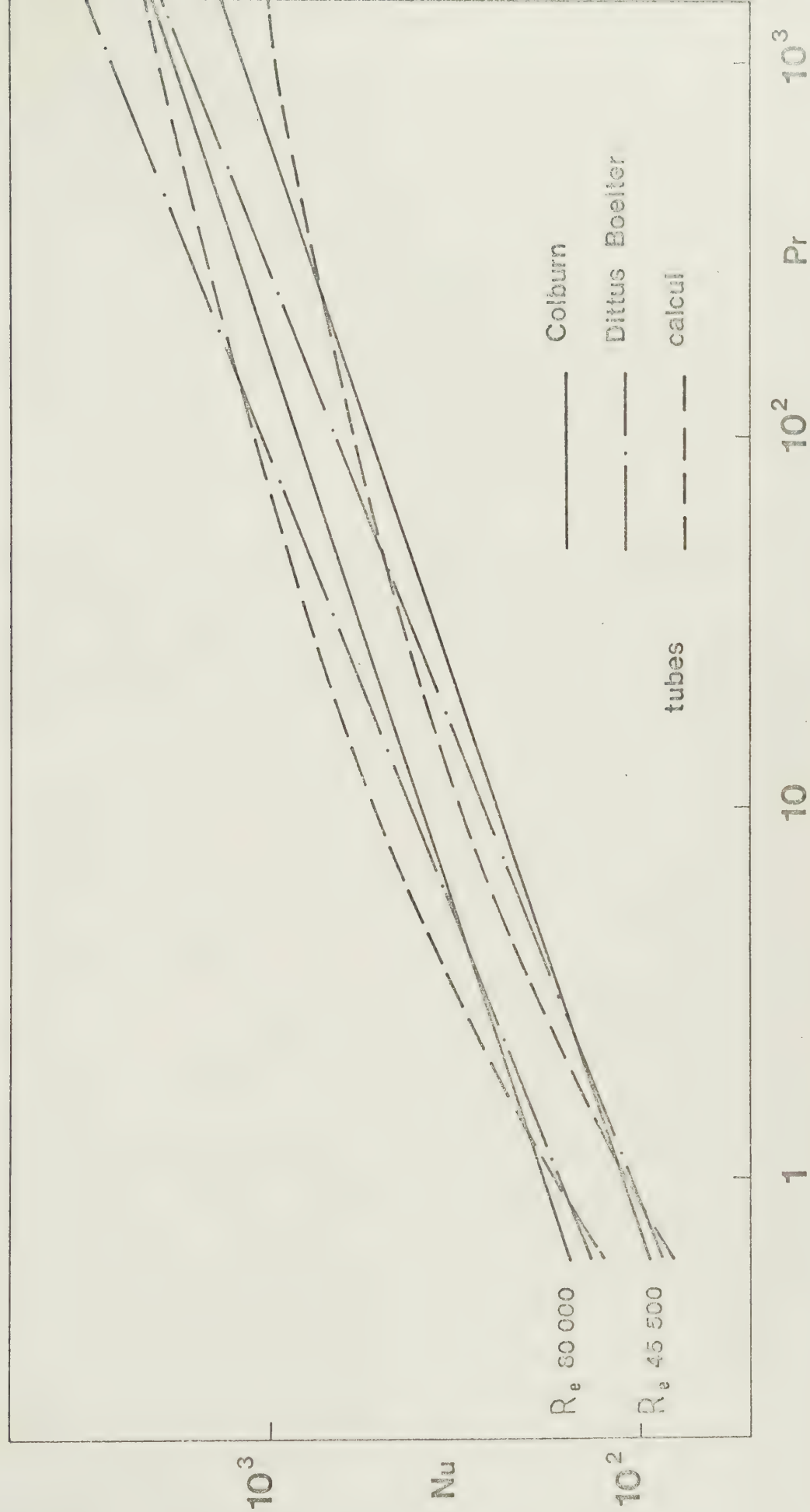


FIG 38. TRANSFERT DE CHALEUR EN FONCTION DU NOMBRE DE PRANDTL MOLECULAIRE

DANS UN TUBE CIRCULAIRE (MODELE COMPLET)

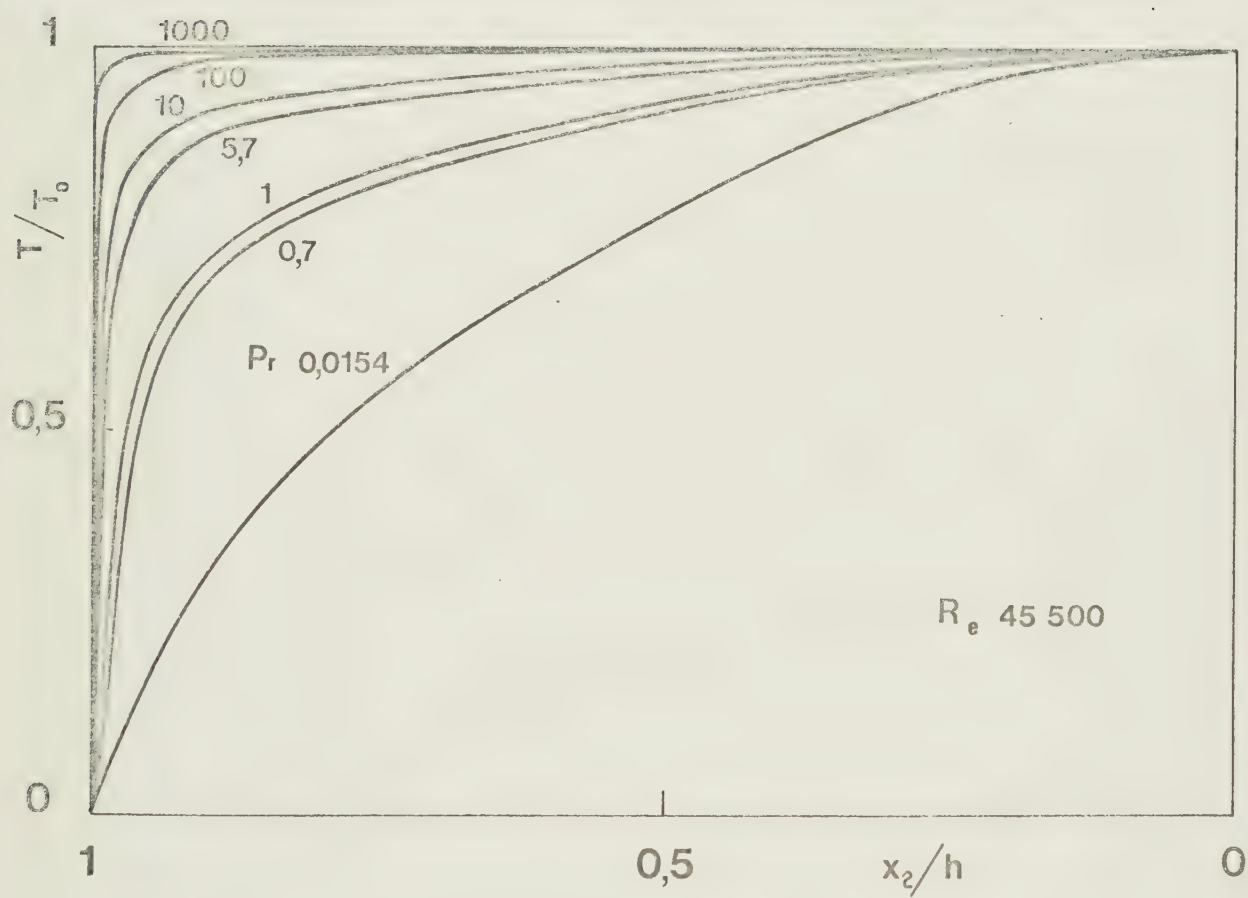


FIG 39 PROFILS DE TEMPERATURE DANS UN TUBE CIRCULAIRE
POUR DIVERS NOMBRES DE PRANDTL MOLECULAIRES
(MODELE COMPLET)

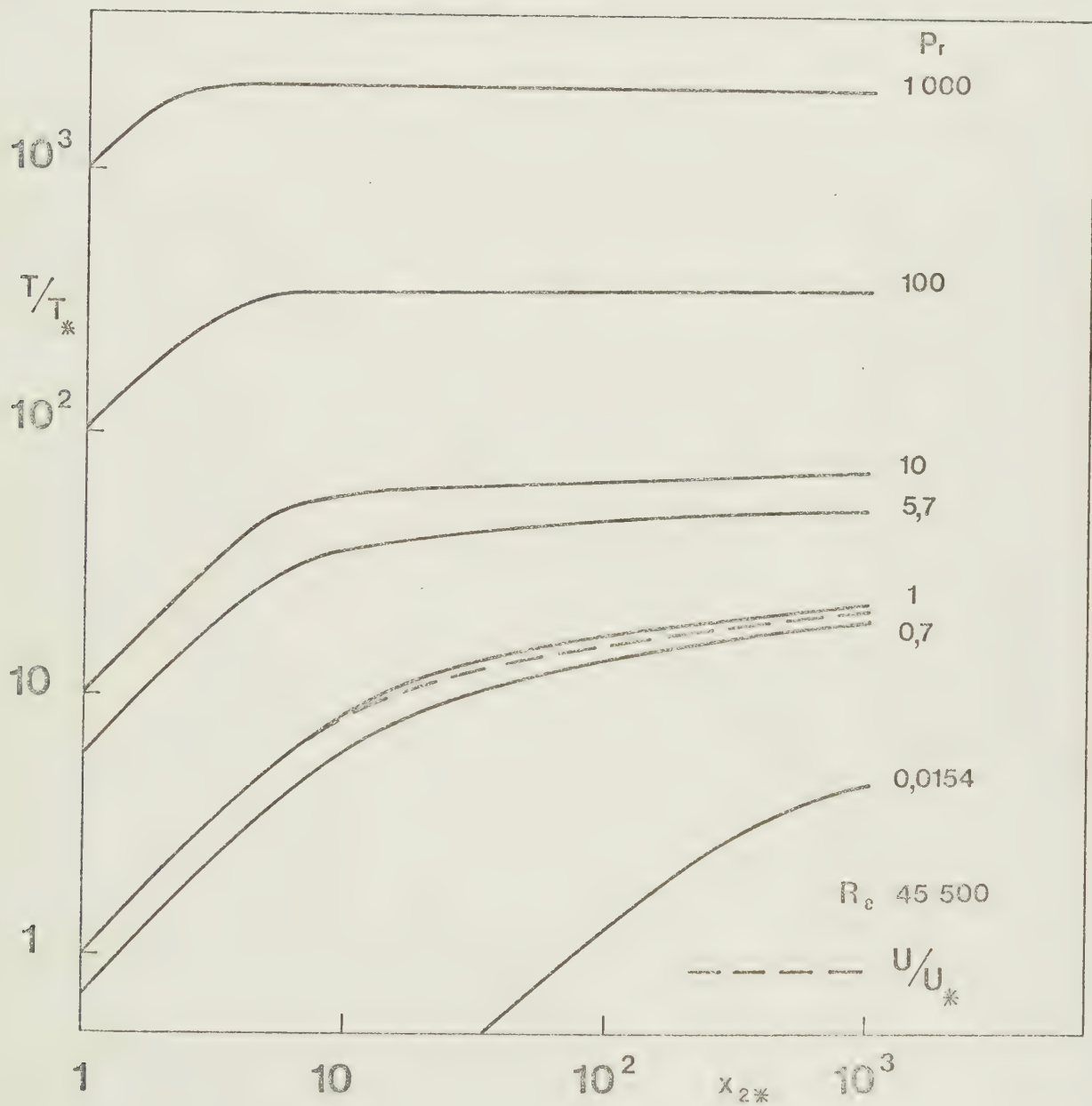


FIG 40 PROFILS DE TEMPERATURE DANS UN TUBE CIRCULAIRE
POUR DIVERS NOMBRES DE PRANDTL MOLECULAIRES
EN REPRESENTATION LOGARITHMIQUE (MODELE COMPLET)

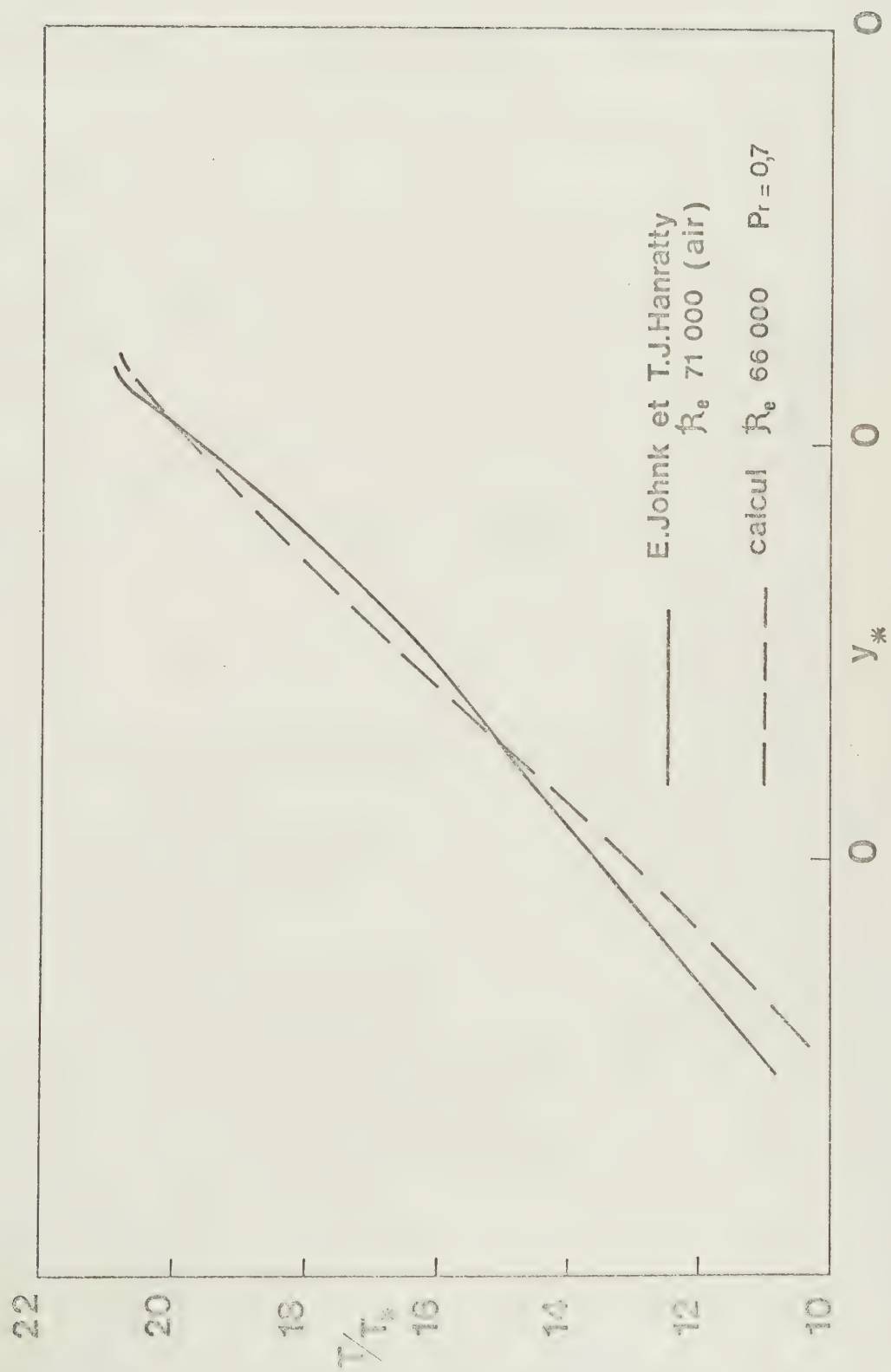


FIG 41 PROFIL DE TEMPERATURE POUR L'AIR DANS UN TUBE CIRCULAIRE (MODELE COMPLET)

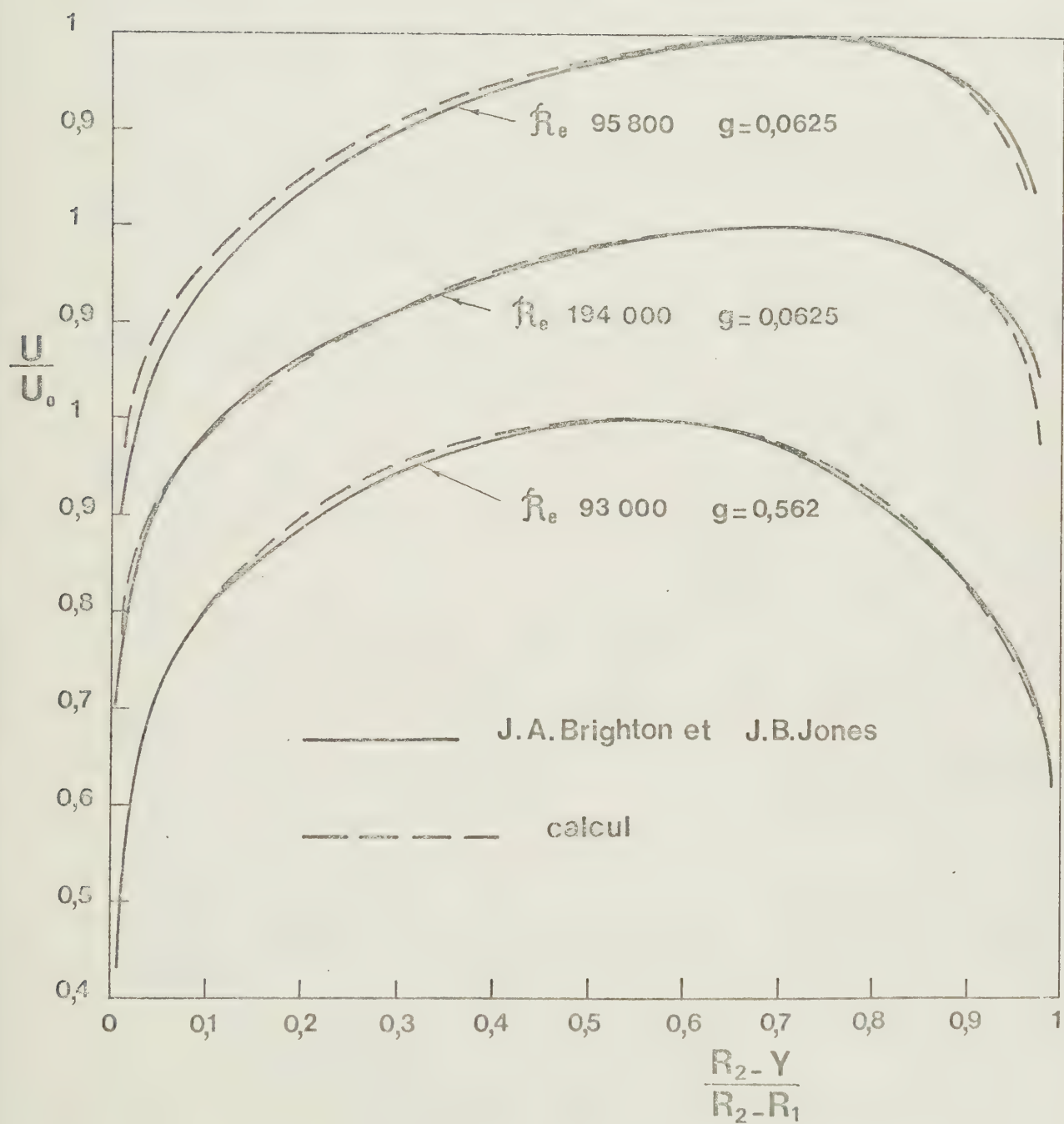


FIG 42 PROFILS DE VITESSE MOYENNE DANS UN ESPACE ANNULAIRE
(MODELE COMPLET)

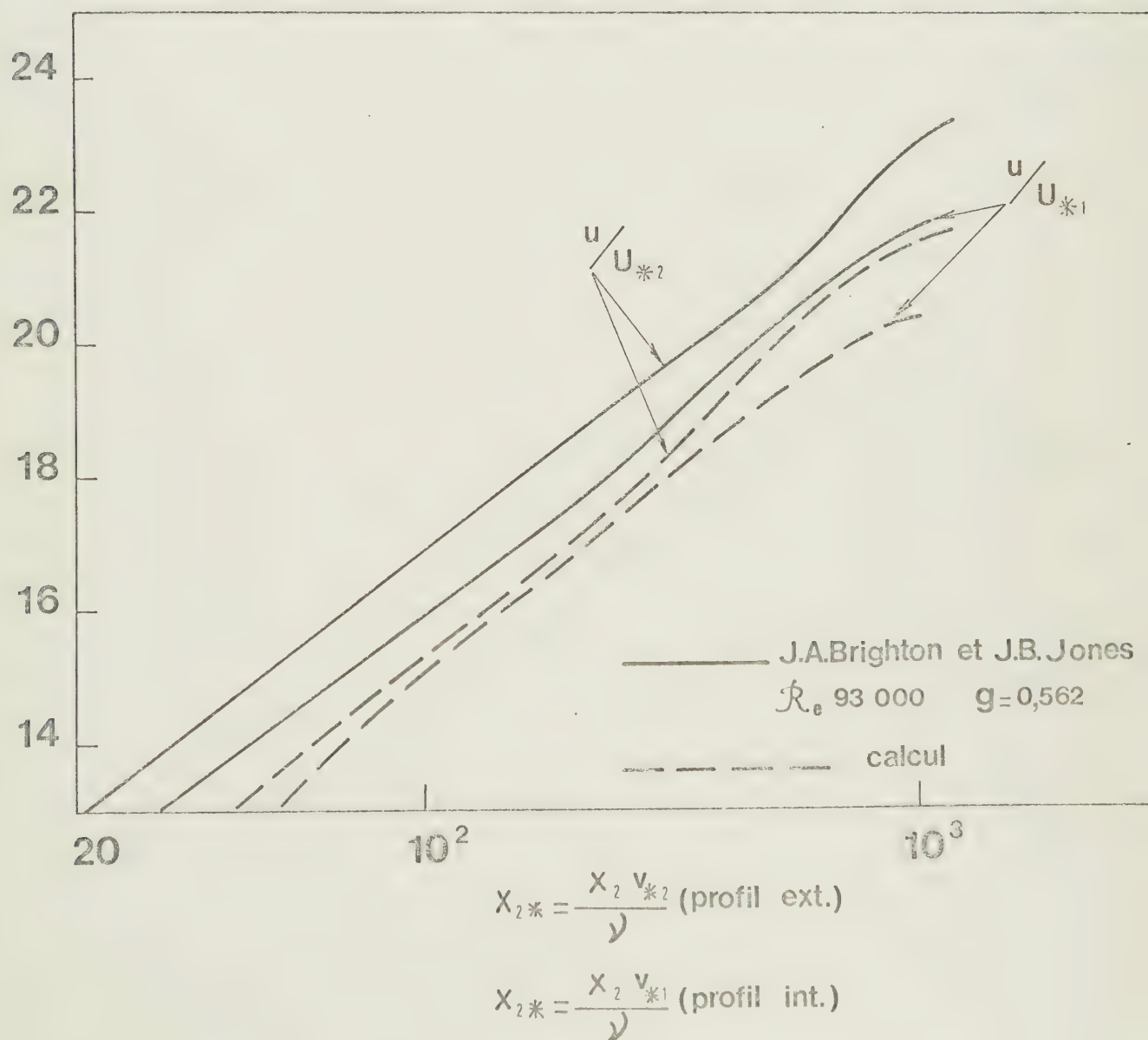


FIG 43 PROFILS LOGARITHMIQUES DE VITESSE DANS UN ESPACE ANNULAIRE (MODELE COMPLET)

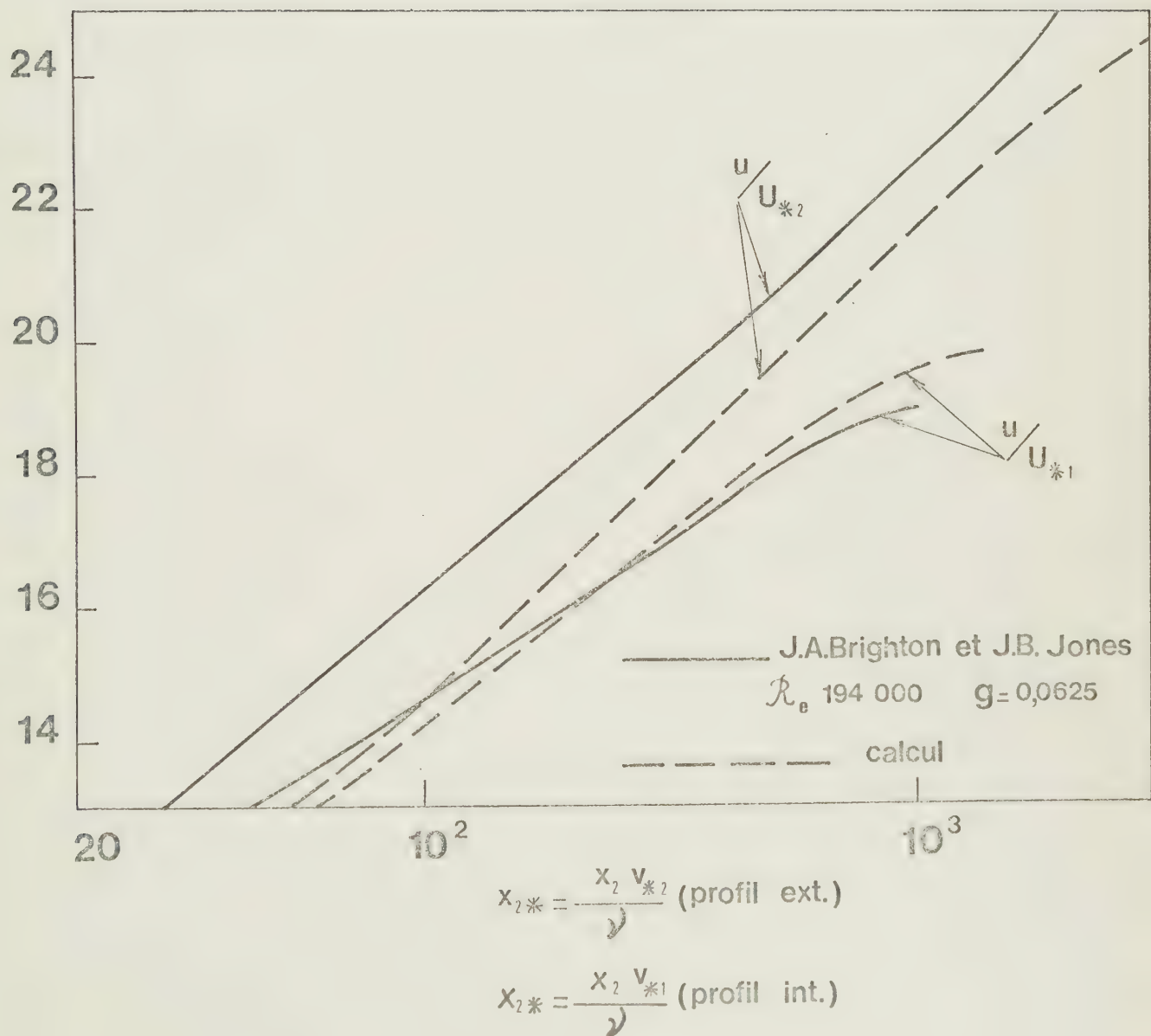


FIG 44 PROFILS LOGARITHMIQUES DE VITESSE, DANS UN JET ANNULAIRE ($Re = 194\,000$)

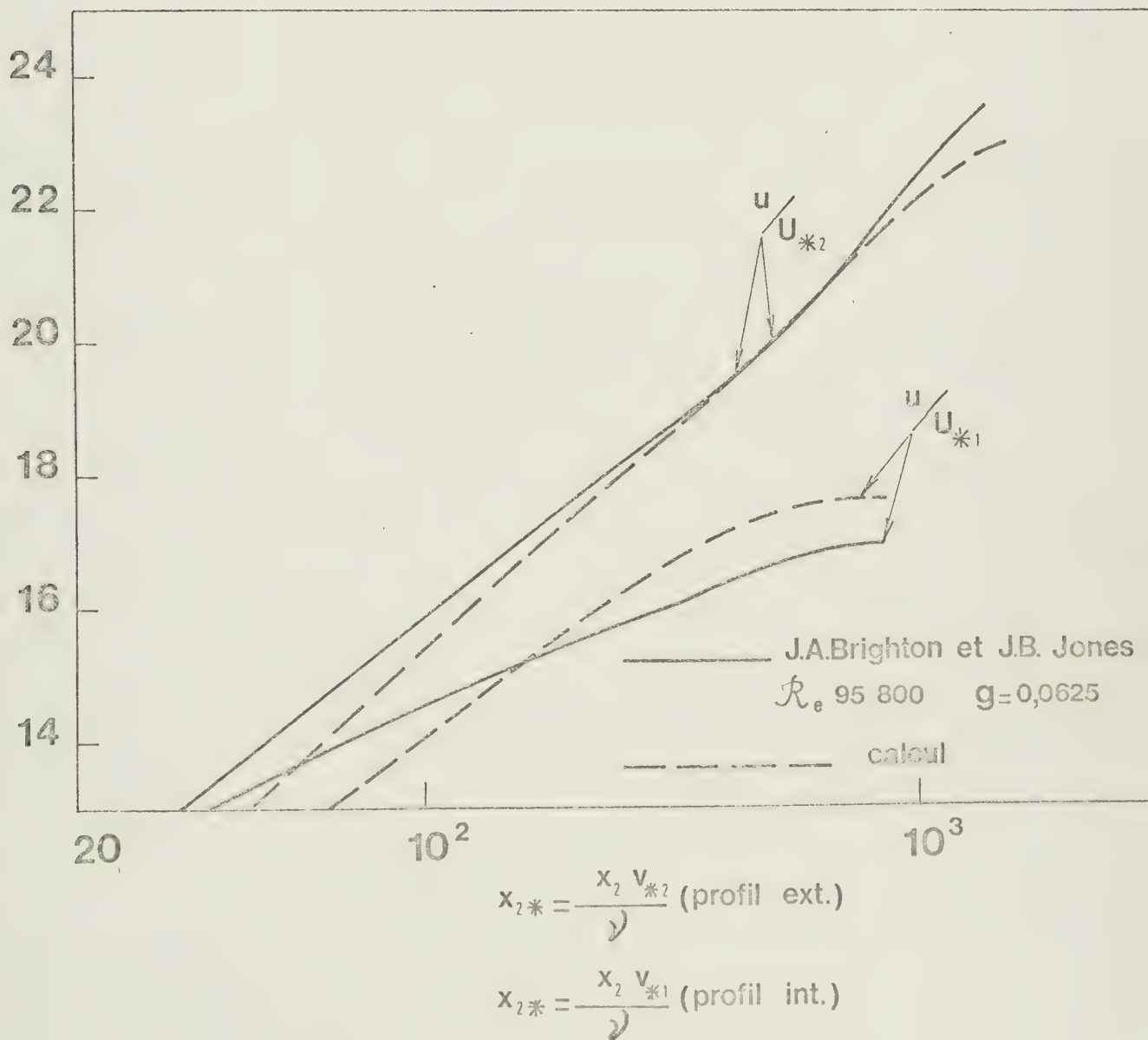


FIG 45 PROFILS LOGARITHMIQUES DE VITESSE DANS UN ESPACE ANNULAIRE (MODELE COMPLET)

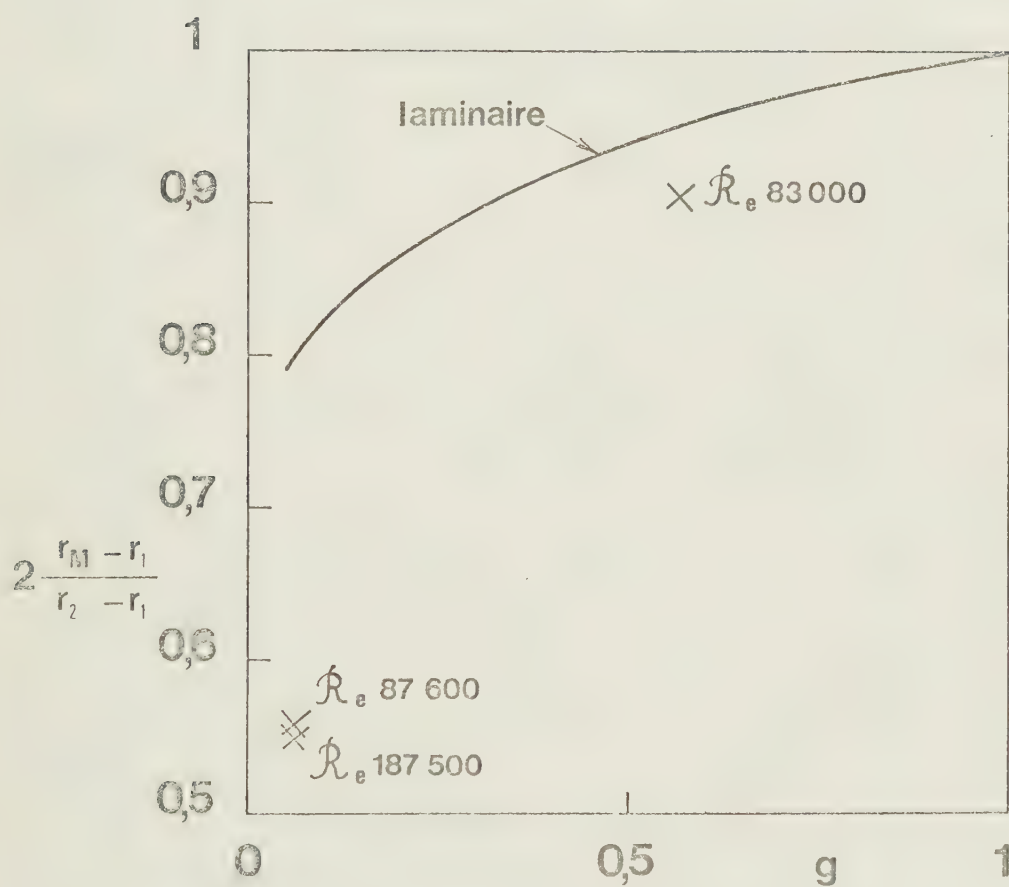


FIG 46 POSITION DU MAXIMUM DE VITESSE DANS UN ESPACE ANNULAIRE (MODELE COMPLET)

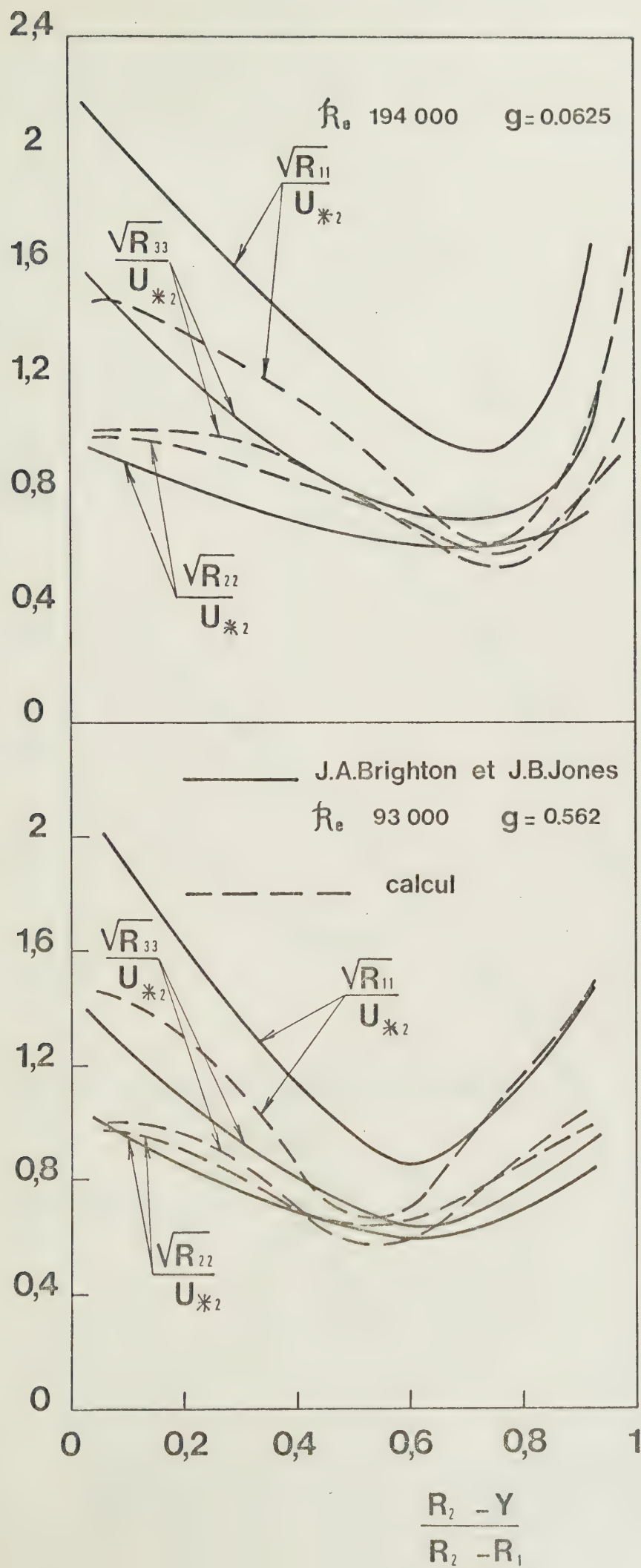


FIG 47 CORRELATIONS DOUBLES DE VITESSE DANS UN ESPACE ANNULAIRE (MODELE COMPLET)

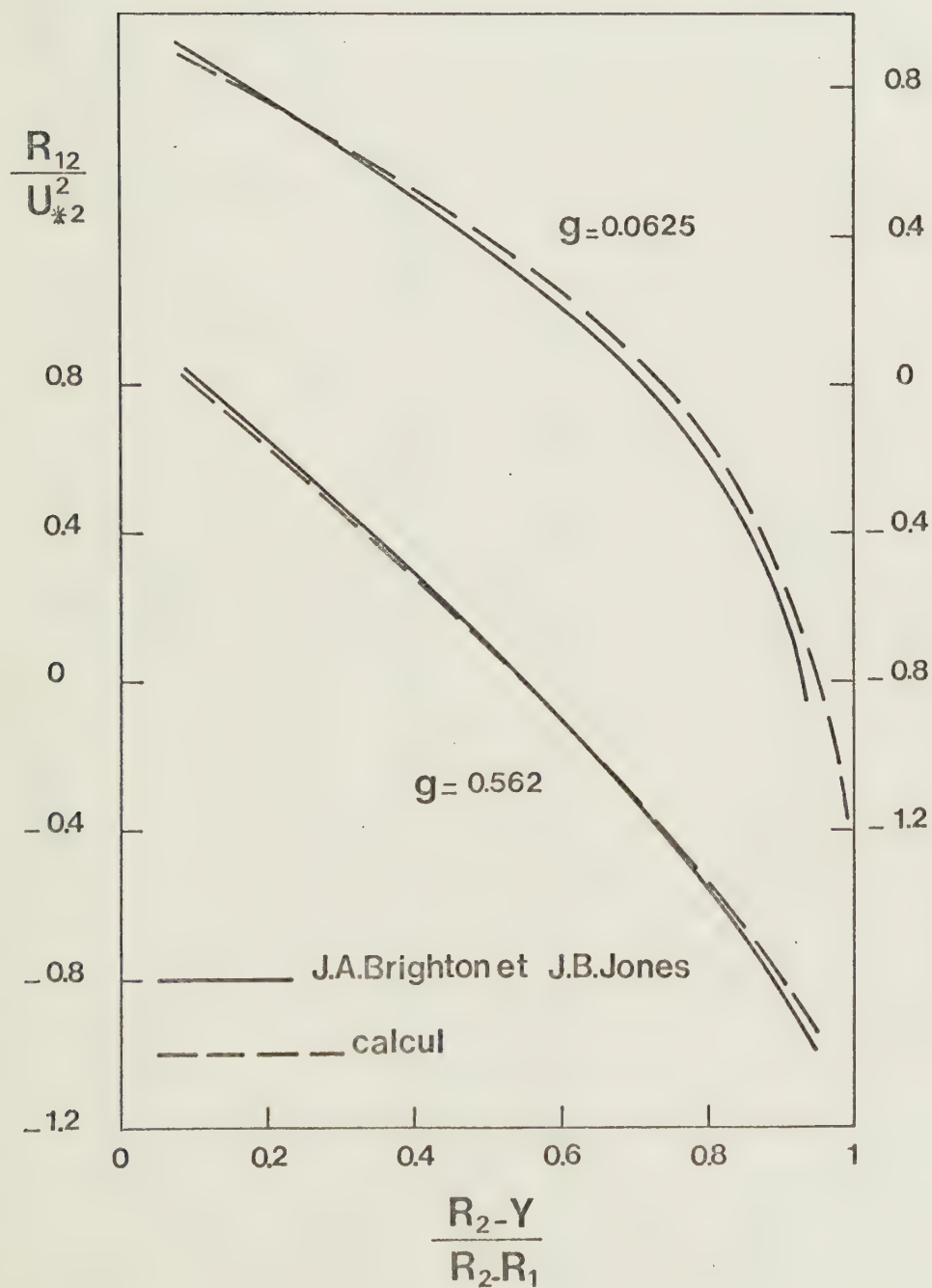


FIG 48 CONTRAINTE DE CISAILLEMENT TURBULENT
DANS UN ESPACE ANNULAIRE (MODELE COMPLET)

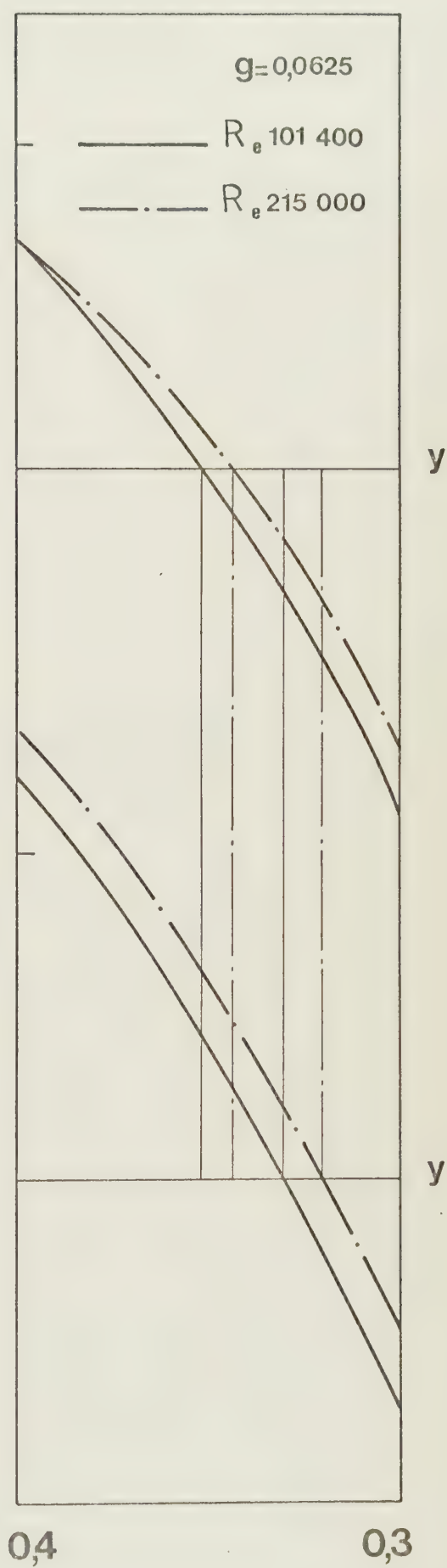
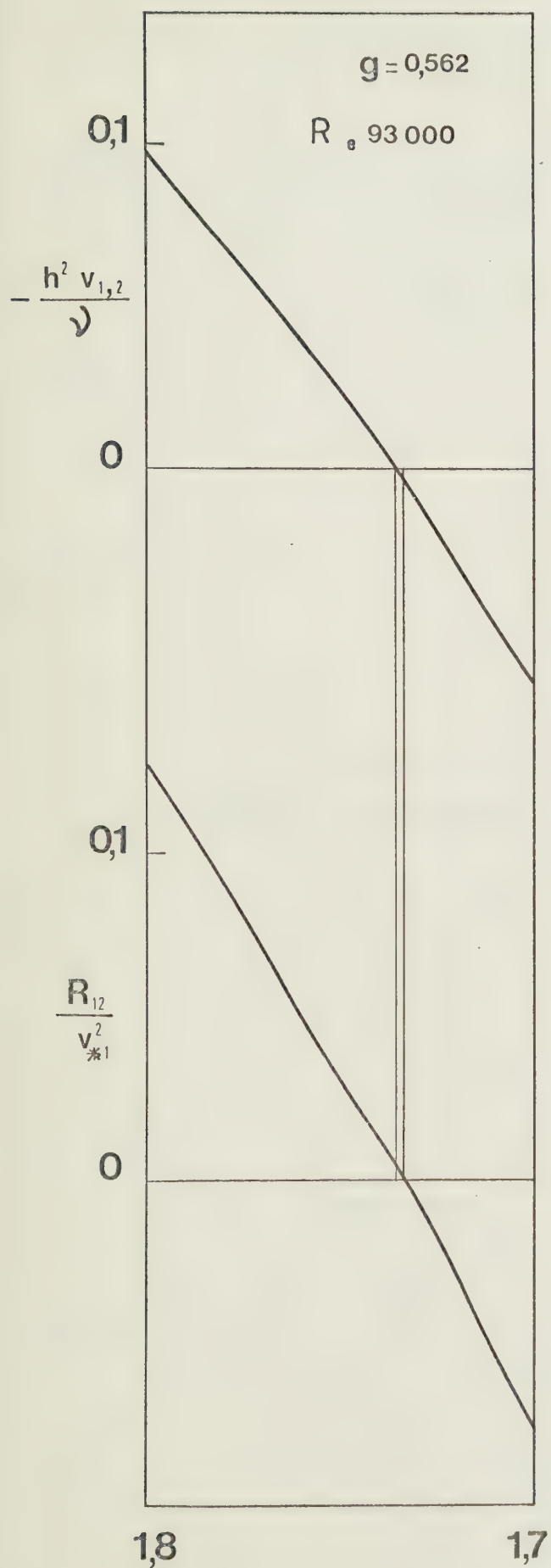


FIG 49 ECART ENTRE ZEROS DES TENSIONS LAMINAIRE ET TURBULENTE
DANS UN ESPACE ANNULAIRE

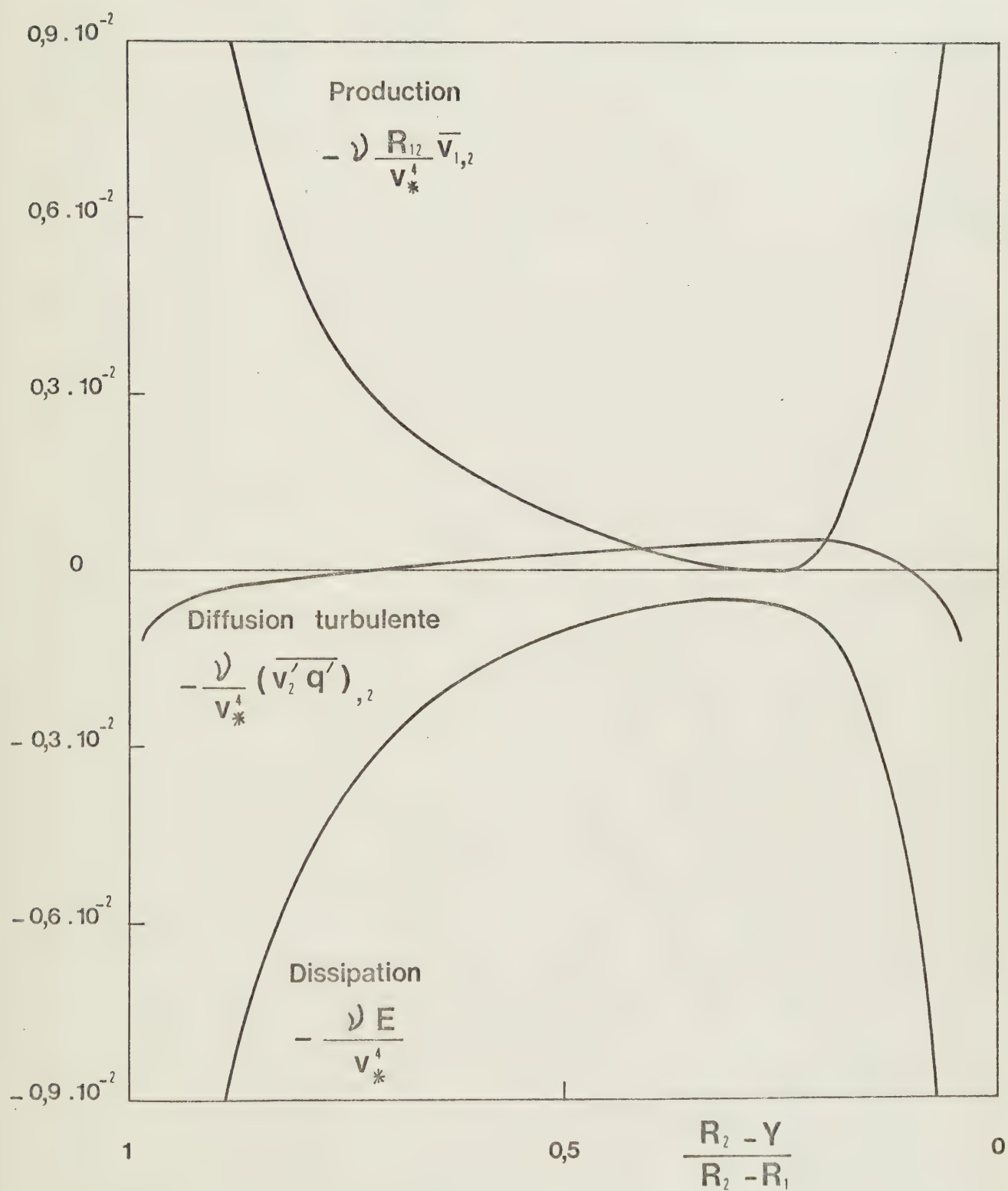


FIG 50 BILAN D'ENERGIE TURBULENTE DANS UN ESPACE ANNULAIRE
 $(\Gamma=10^7, Re=10^5, g=0,0625)$

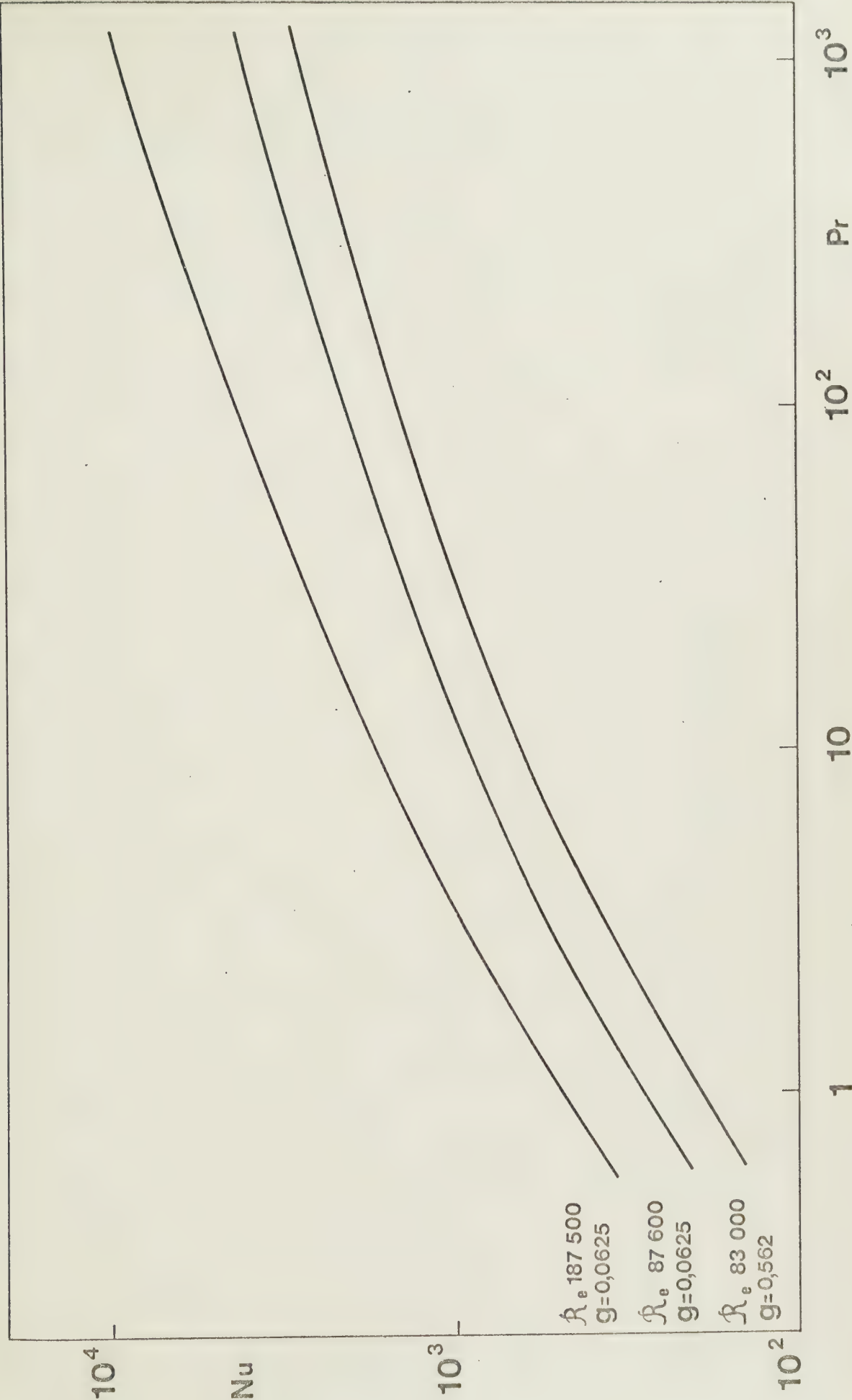


FIG 51 TRANSFERT DE CHALEUR EN FONCTION DU NOMBRE DE PRANDTL MOLECULAIRE DANS UN ESPACE ANNULAIRE
 (MODELE COMPLET)

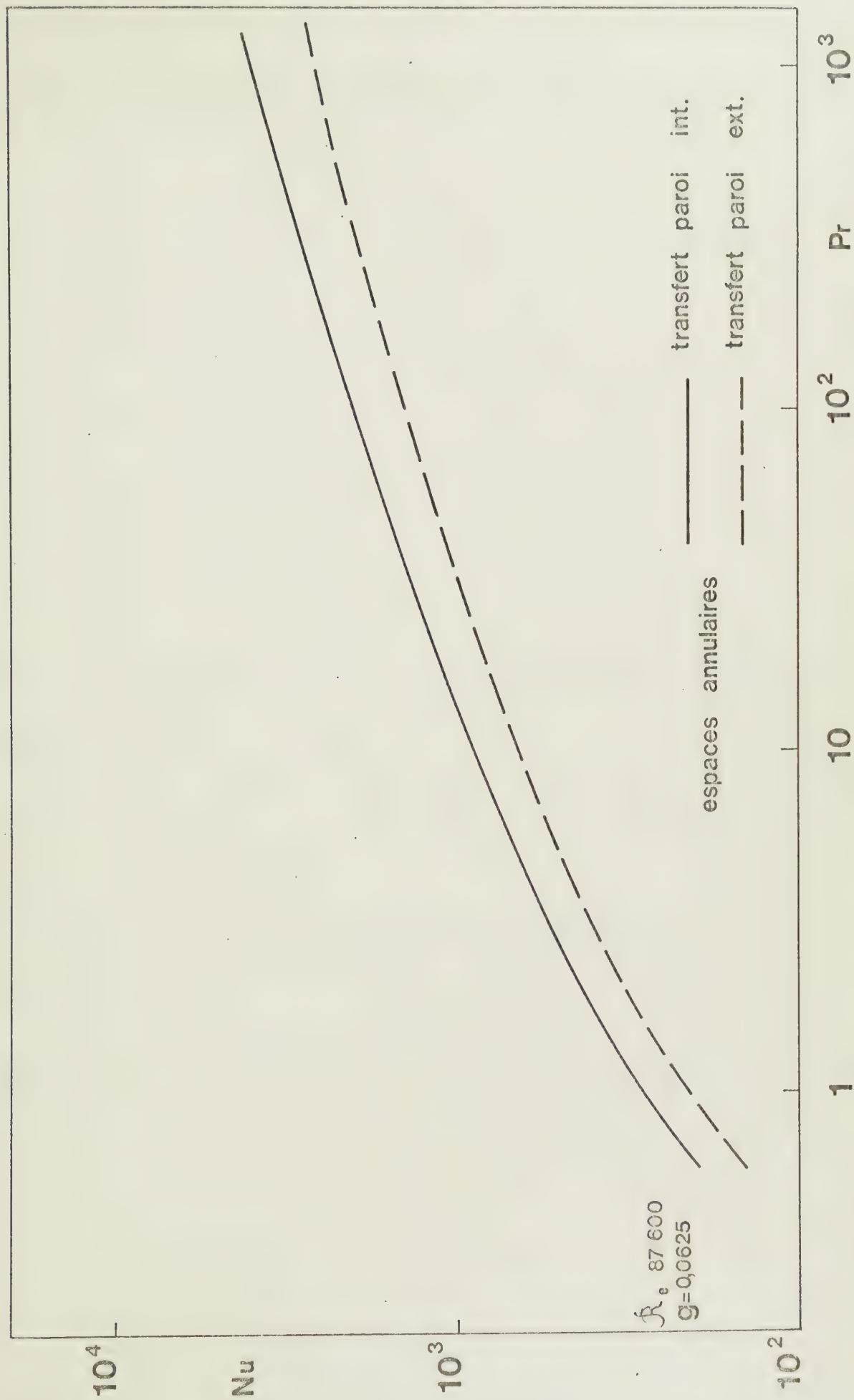


FIG 52 TRANSFERT DE CHALEUR EN FONCTION DU NOMBRE DE PRANDTL MOLECULAIRE SUR LES PAROIS INTERIEURE
 ET EXTERIEURE D'UN ESPACE ANNULAIRE (MODELE COMPLET)

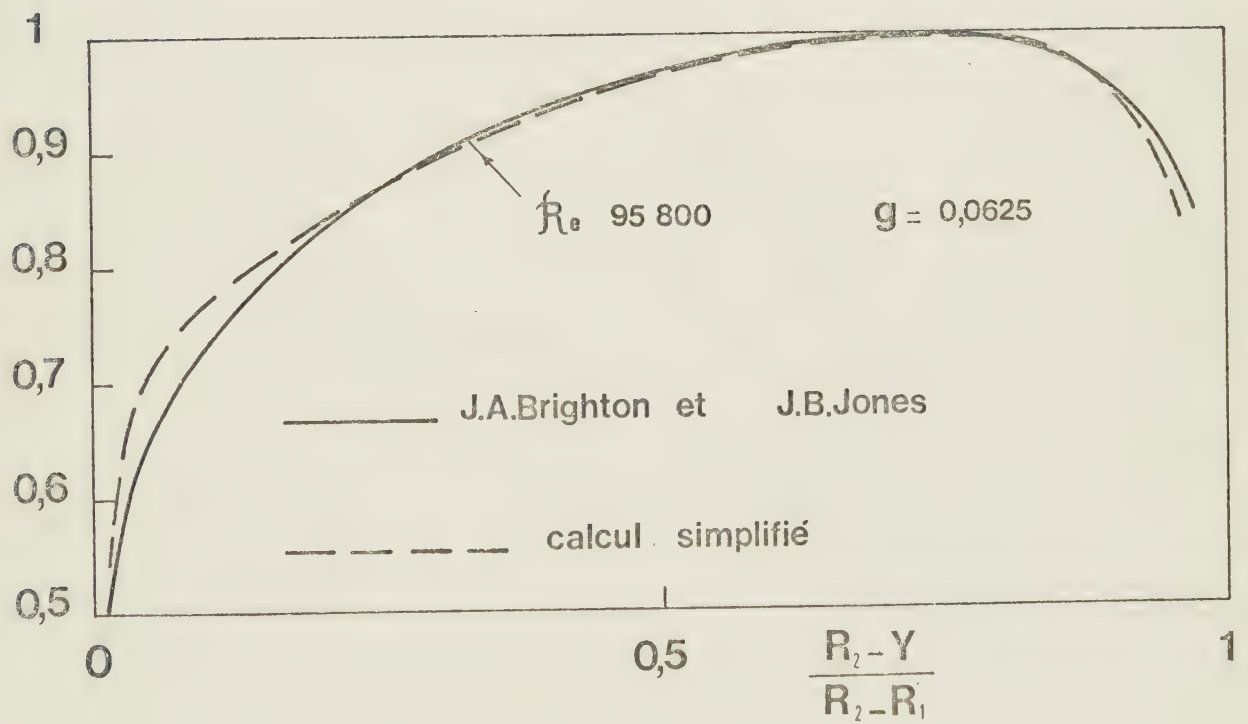


FIG 53 PROFIL DE VITESSE MOYENNE DANS UN ESPACE ANNULAIRE
(MODELE SIMPLIFIE)

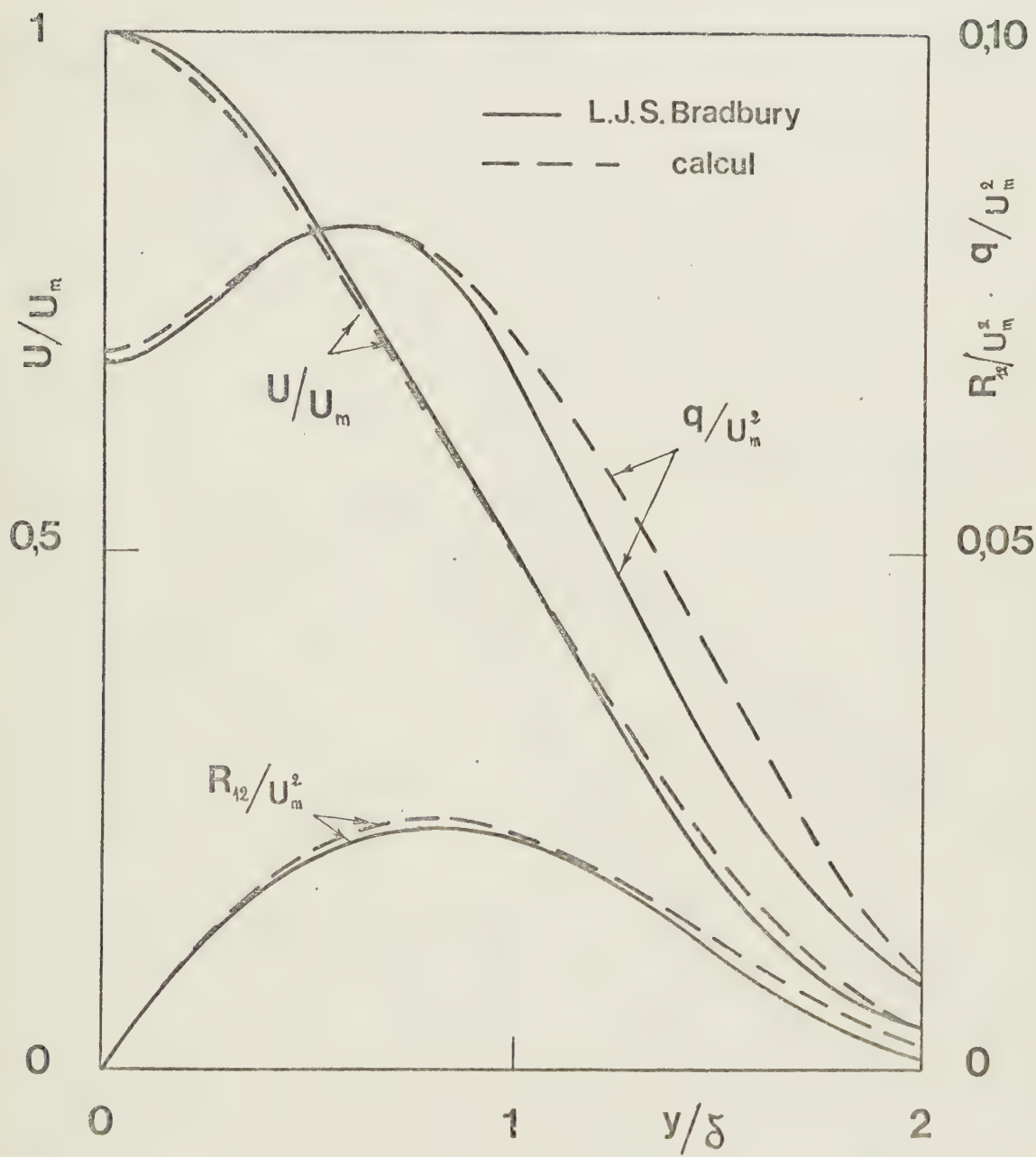


FIG 54 JET PLAN TURBULENT DANS UNE ATMOSPHÈRE
AU REPOS (MODELE SIMPLIFIE)

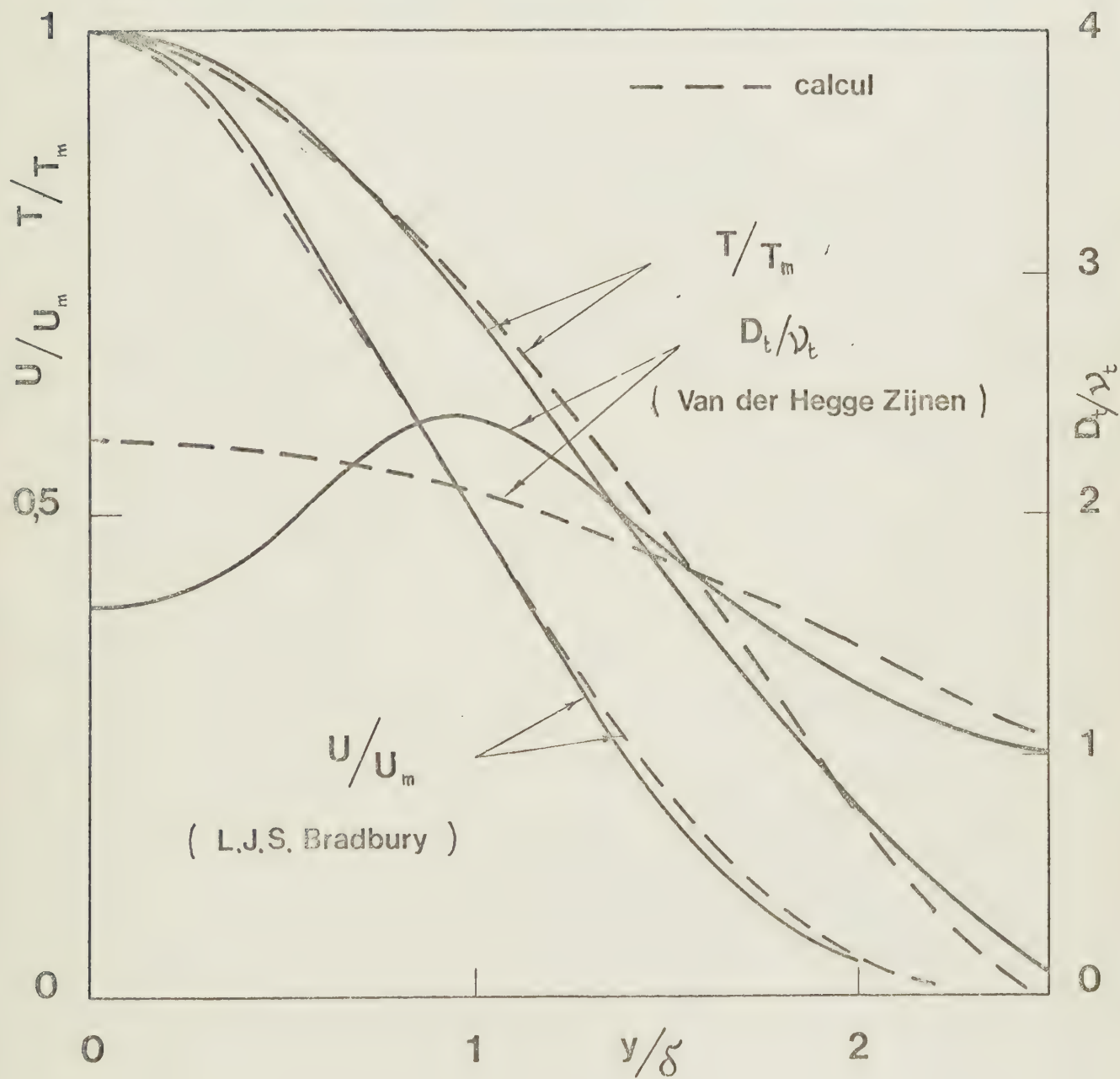


FIG 55 TRANSFERT DE CHALEUR DANS LE JET PLAN
 TURBULENT (MODELE SIMPLIFIE)

15

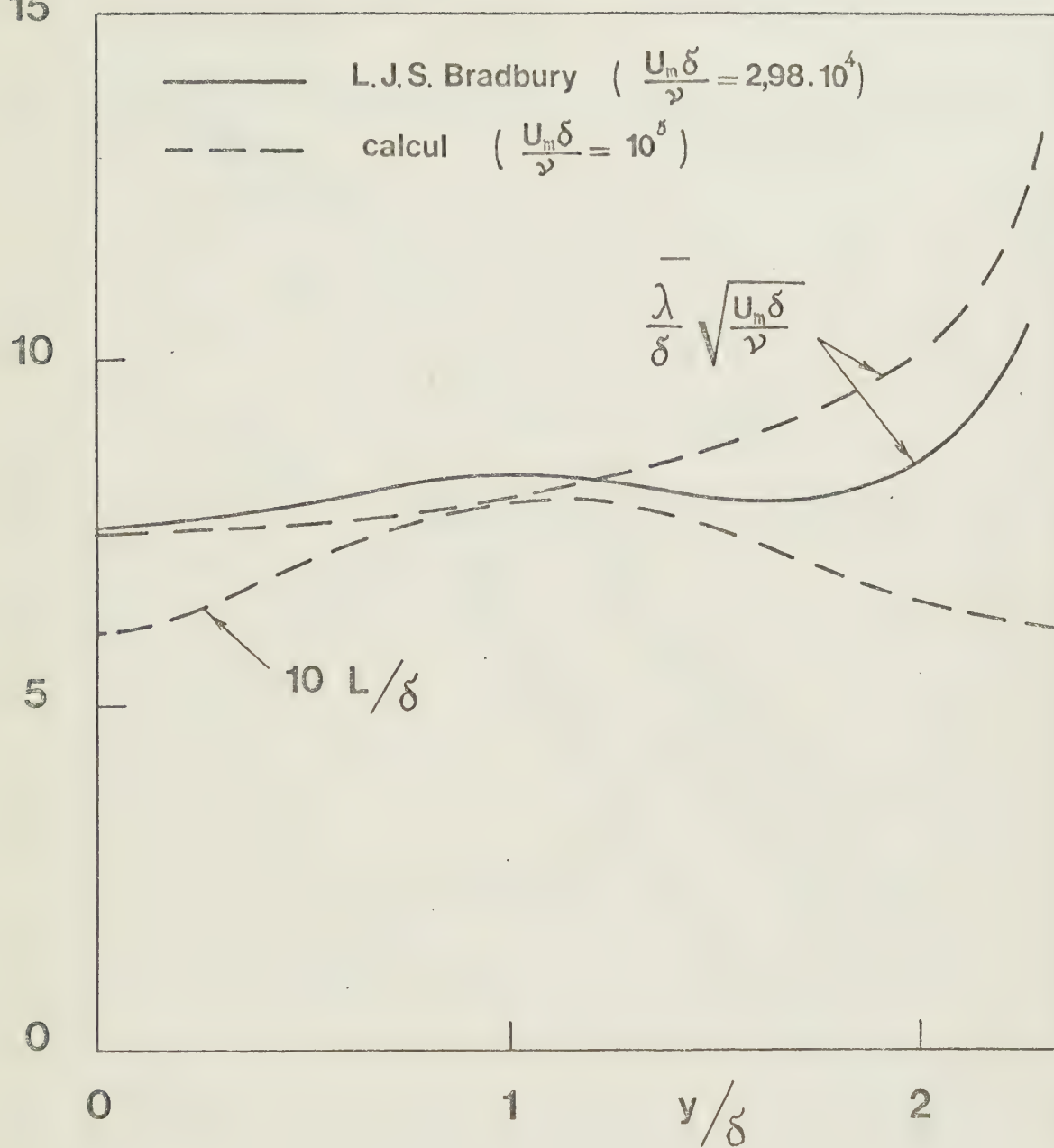


FIG 56 ECHELLES DE TURBULENCE DANS LE JET PLAN TURBULENT
(MODELE SIMPLIFIE)

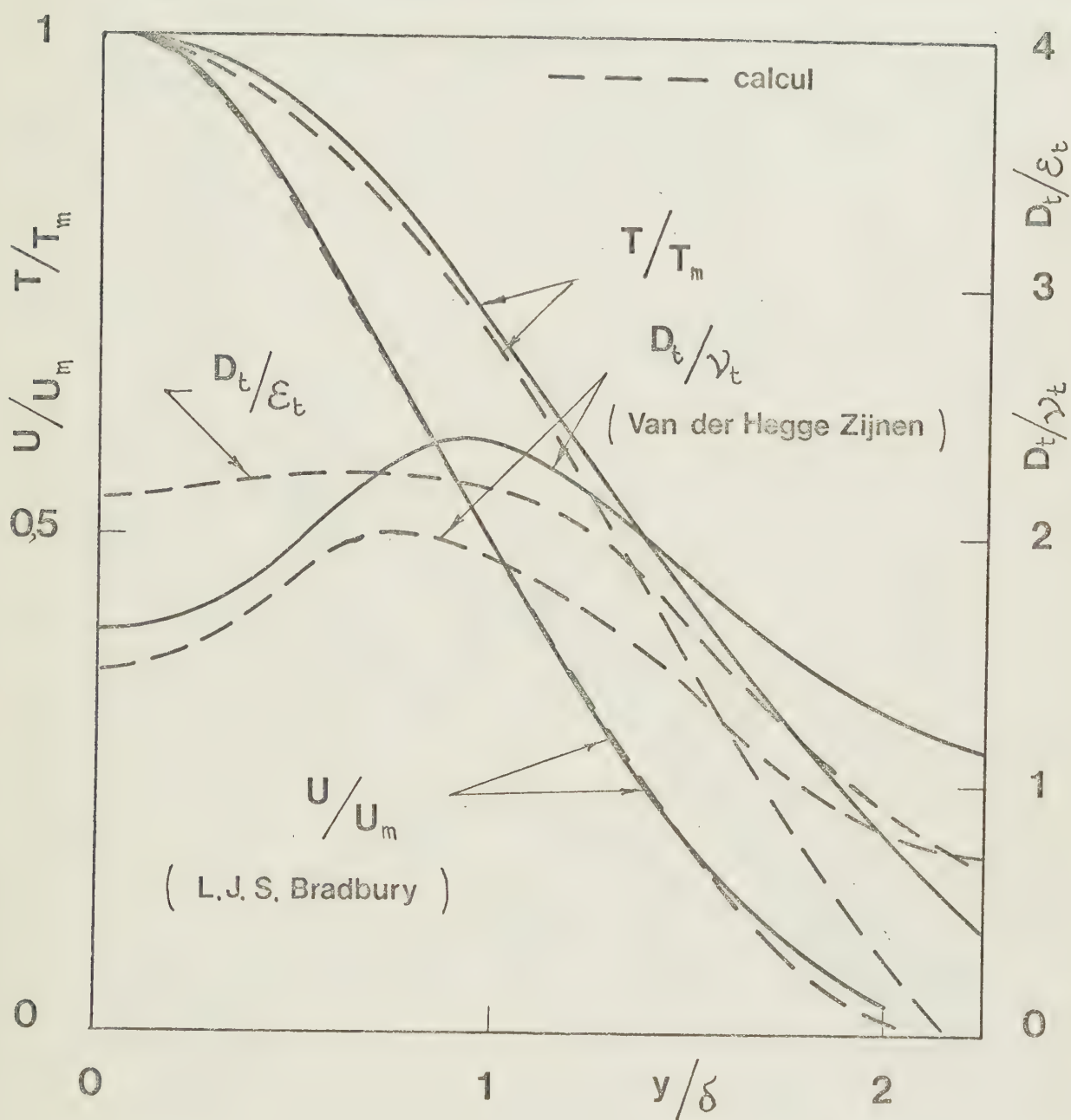


FIG 57 VITESSE ET TEMPERATURE DANS UN JET PLAN TURBULENT EN ATMOSPHERE IMMOBILE (MODELE COMPLET)

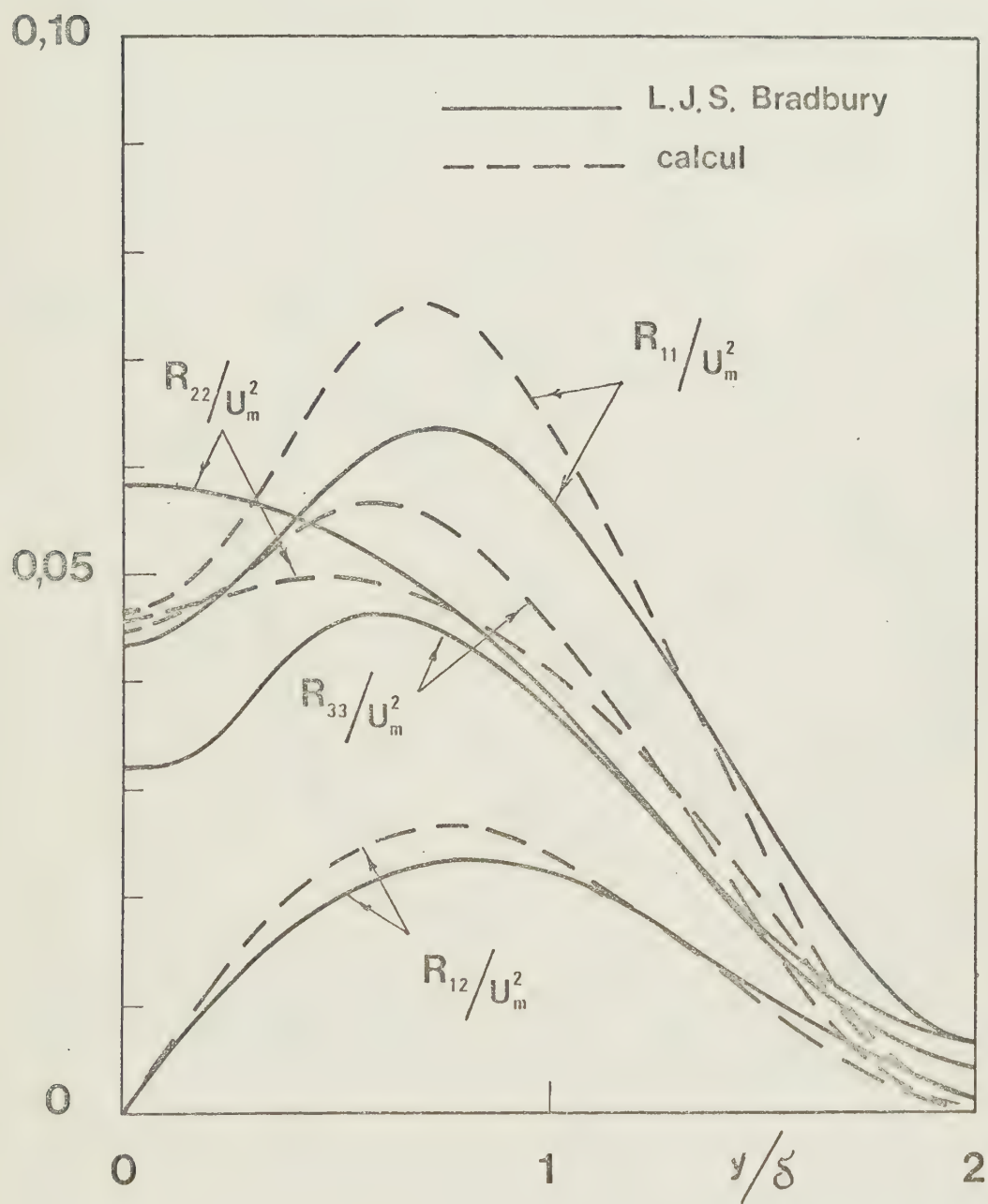


FIG 58 CORRELATIONS DOUBLES DE VITESSE DANS LE JET PLAN
TURBULENT (MODELE COMPLET)

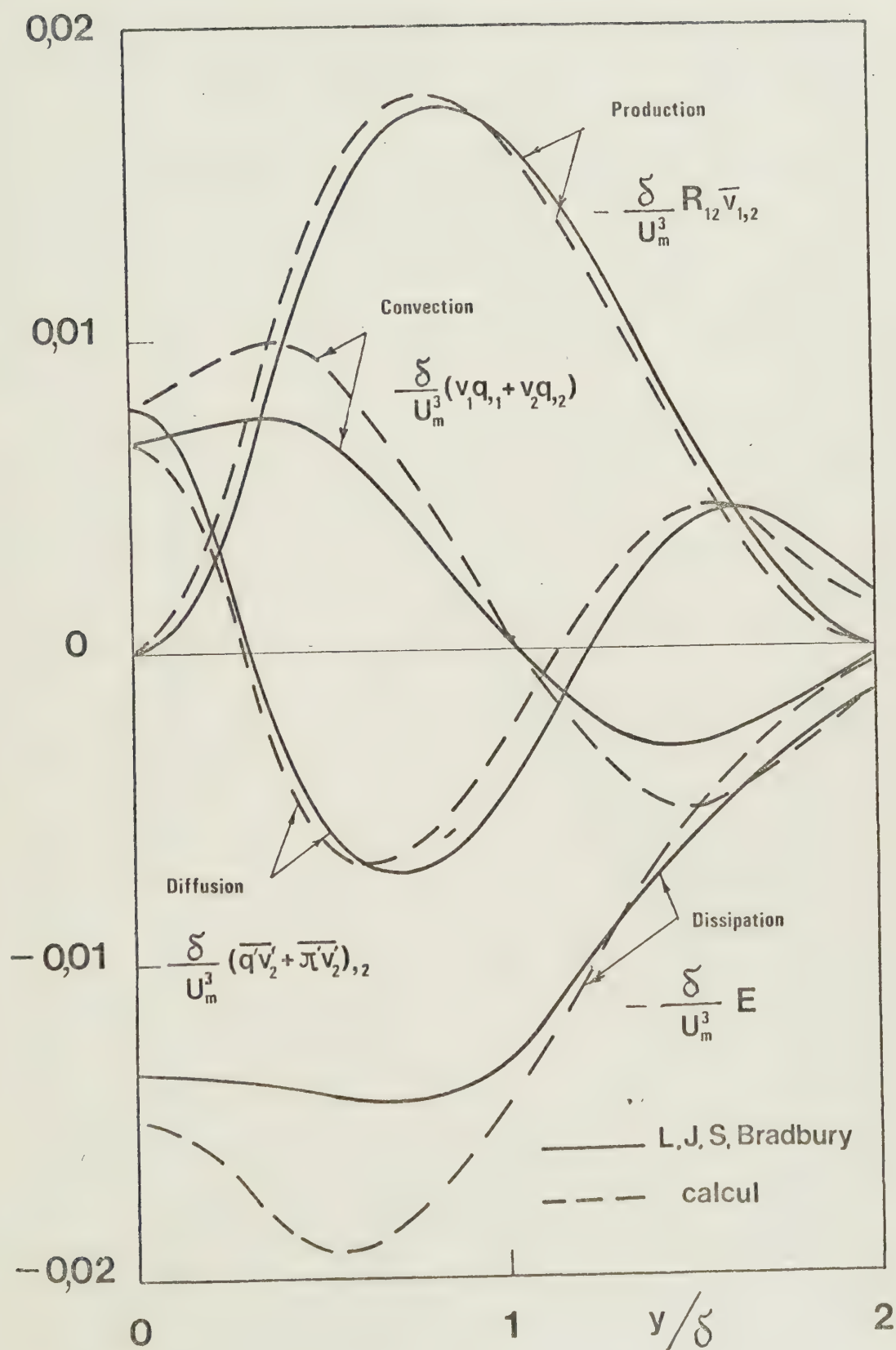


FIG 59 BILAN D'ENERGIE TURBULENTE DANS LE JET PLAN
(MODELE COMPLET)

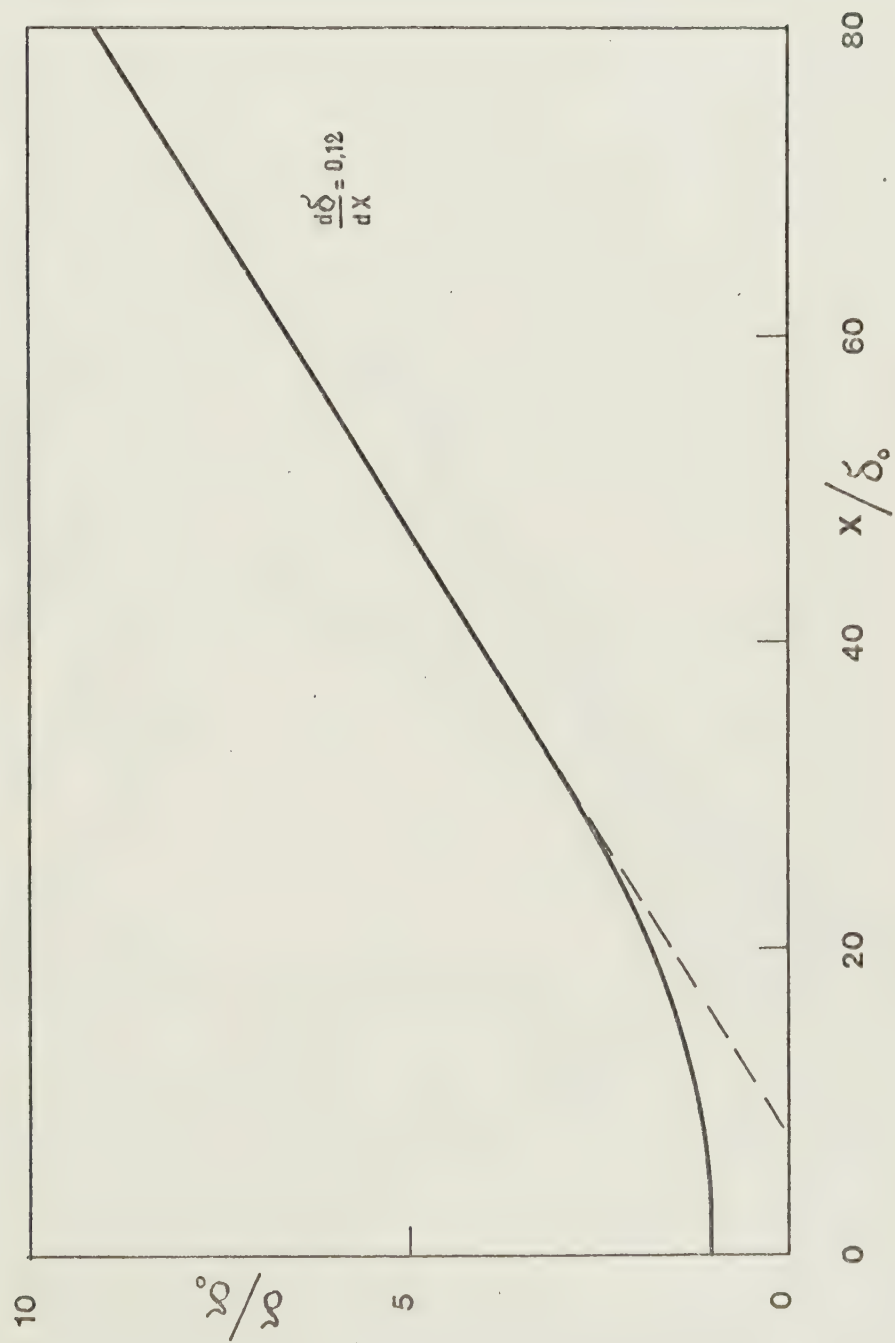


FIG 60 EVOLUTION DE L'ÉPAISSEUR DU JET PLAN DANS LA RÉGION INITIALE
(MODÈLE COMPLET)

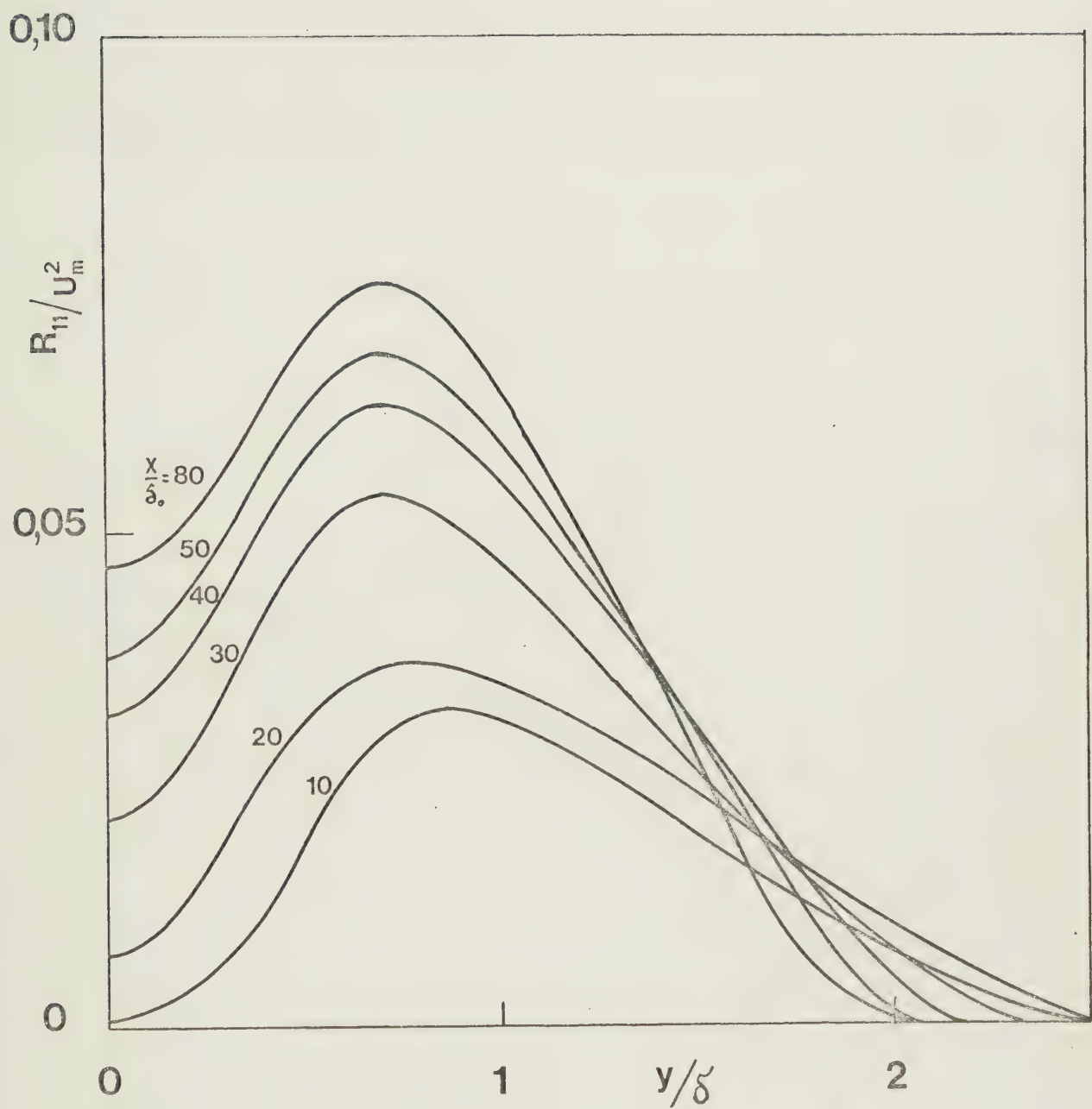


FIG 61 EVOLUTION DE L'INTENSITE DE TURBULENCE DANS LA REGION INITIALE DU JET PLAN (MODELE COMPLET)

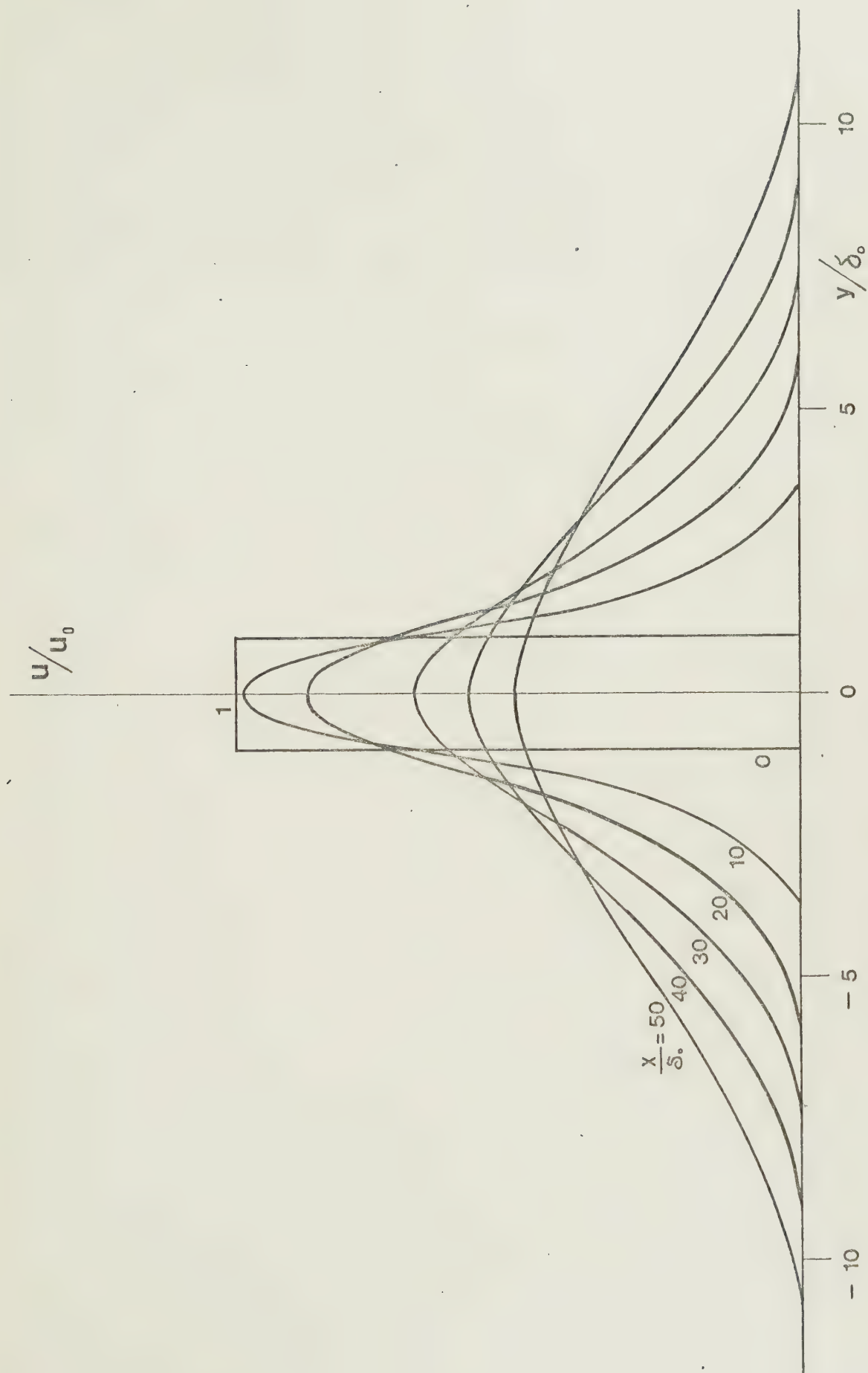


FIG 62 EVOLUTION DES PROFILS DE VITESSE MOYENNE DANS LE JET PLAN TURBULENT
(MODELE COMPLET)

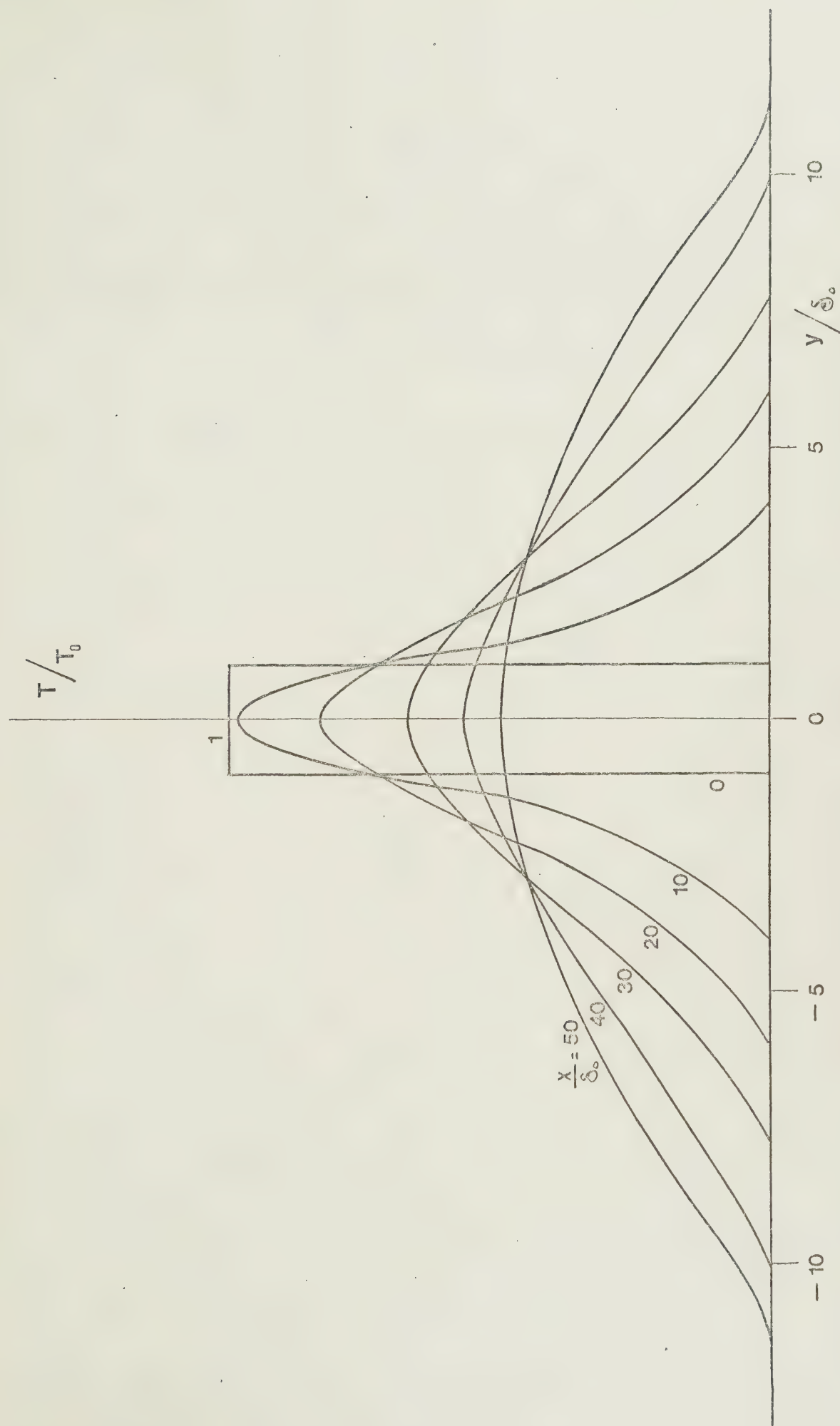


FIG 63 EVOLUTION DES PROFILS DE TEMPERATURE MOYENNE DANS LE JET PLAN TURBULENT
(MODELE COMPLET)

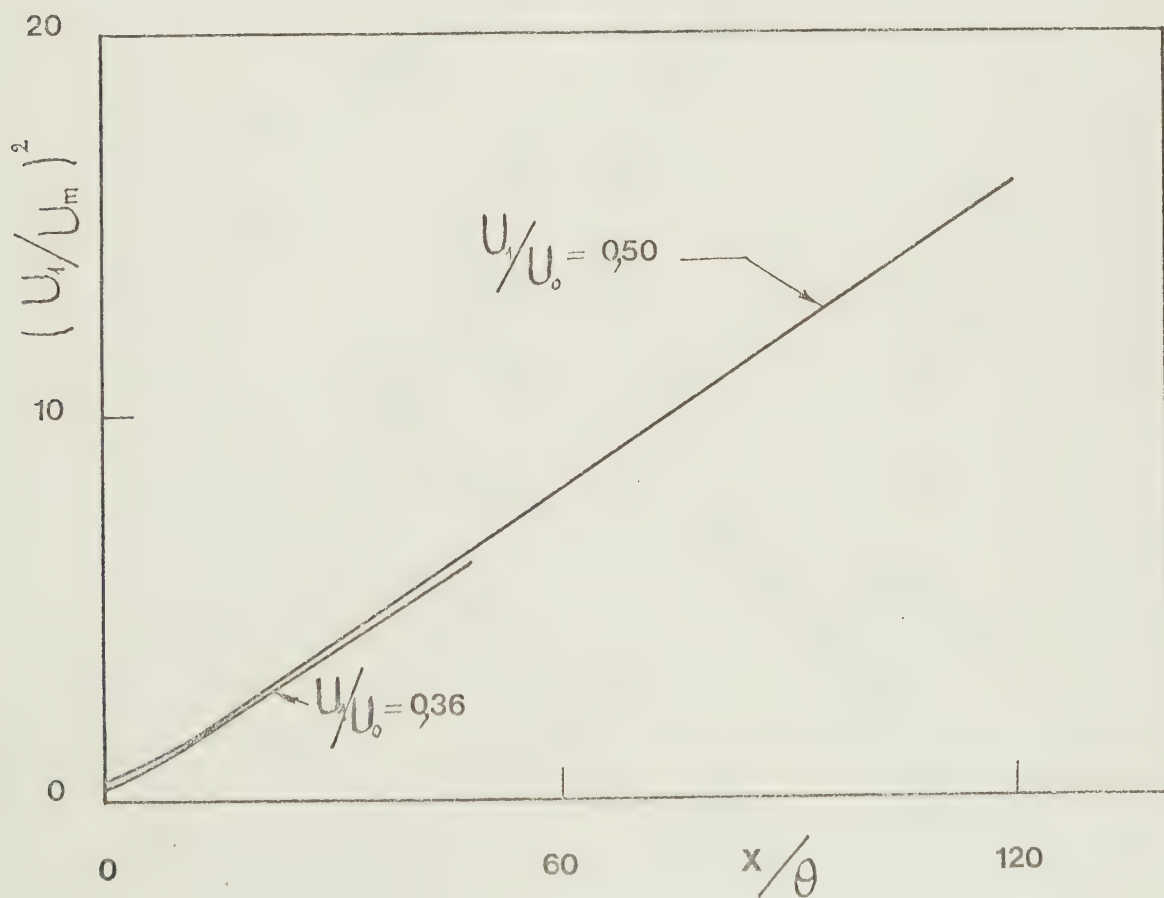
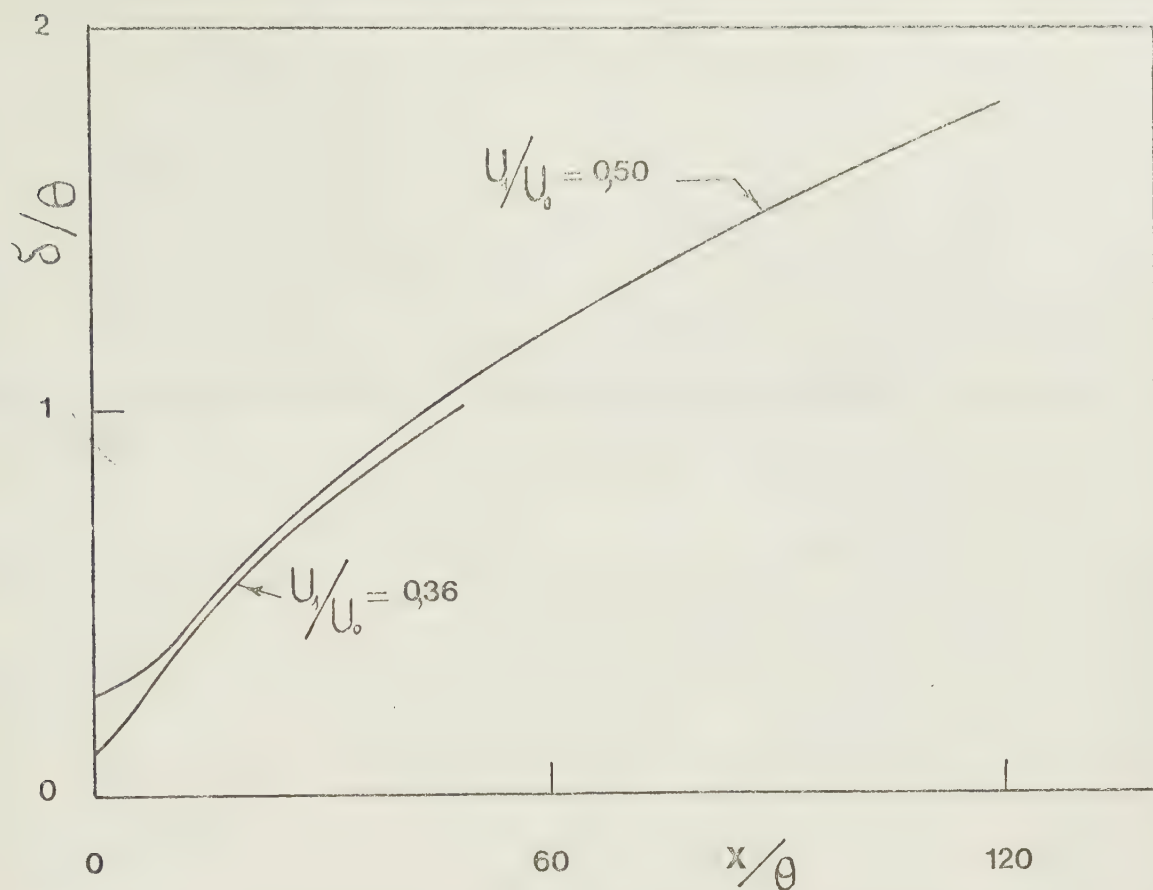


FIG 64 EPAISSEUR D'UN JET PLAN TURBULENT EVOLUANT DANS UNE ATMOSPHERE DE VITESSE UNIFORME (MODELE SIMPLIFIE)

FIG 65 VITESSE AXIALE DU JET PLAN TURBULENT EVOLUANT DANS UNE ATMOSPHERE DE VITESSE UNIFORME (MODELE SIMPLIFIE)

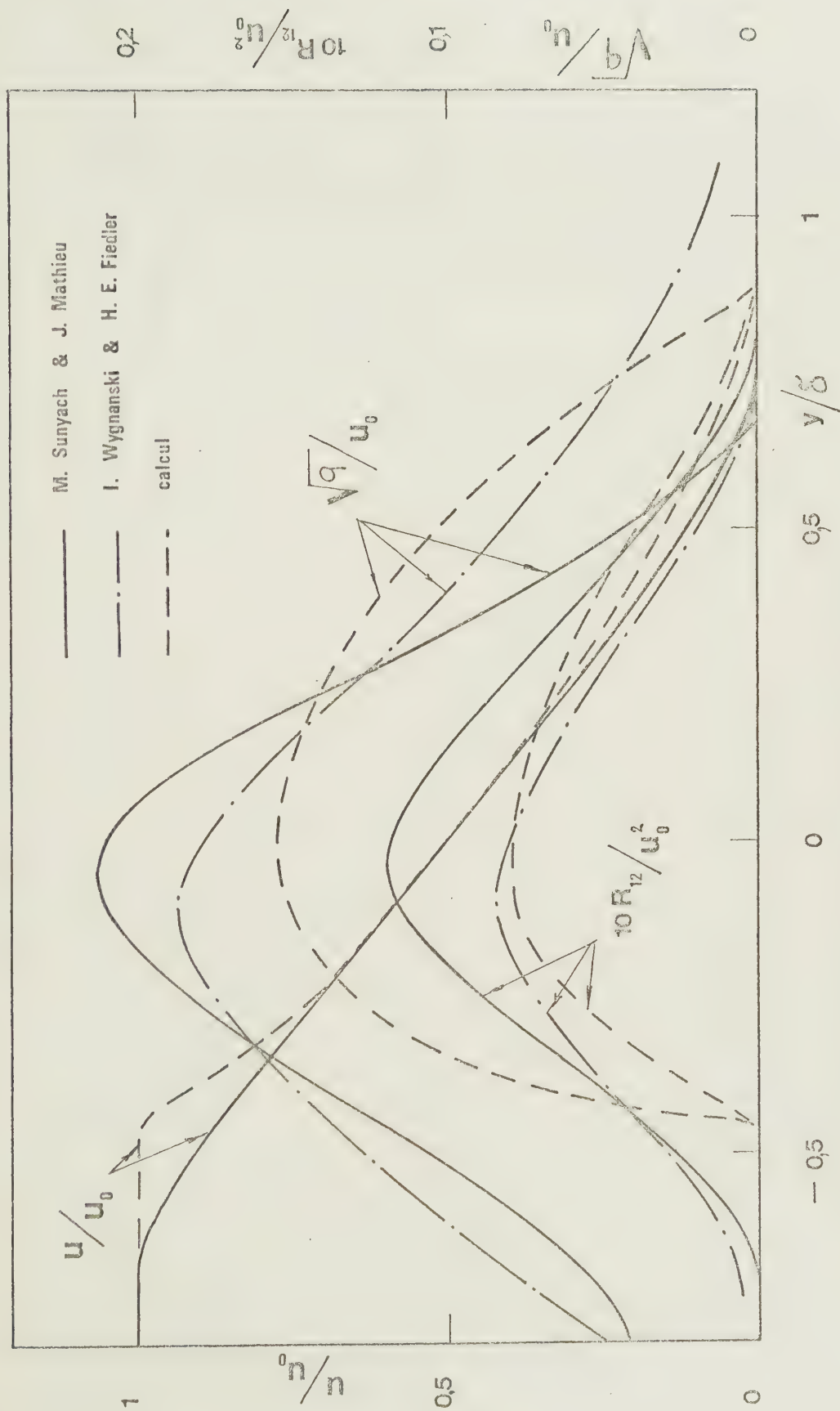


FIG 66 ZONE DE MELANGE DU JET PLAN (MODELE SIMPLIFIE)

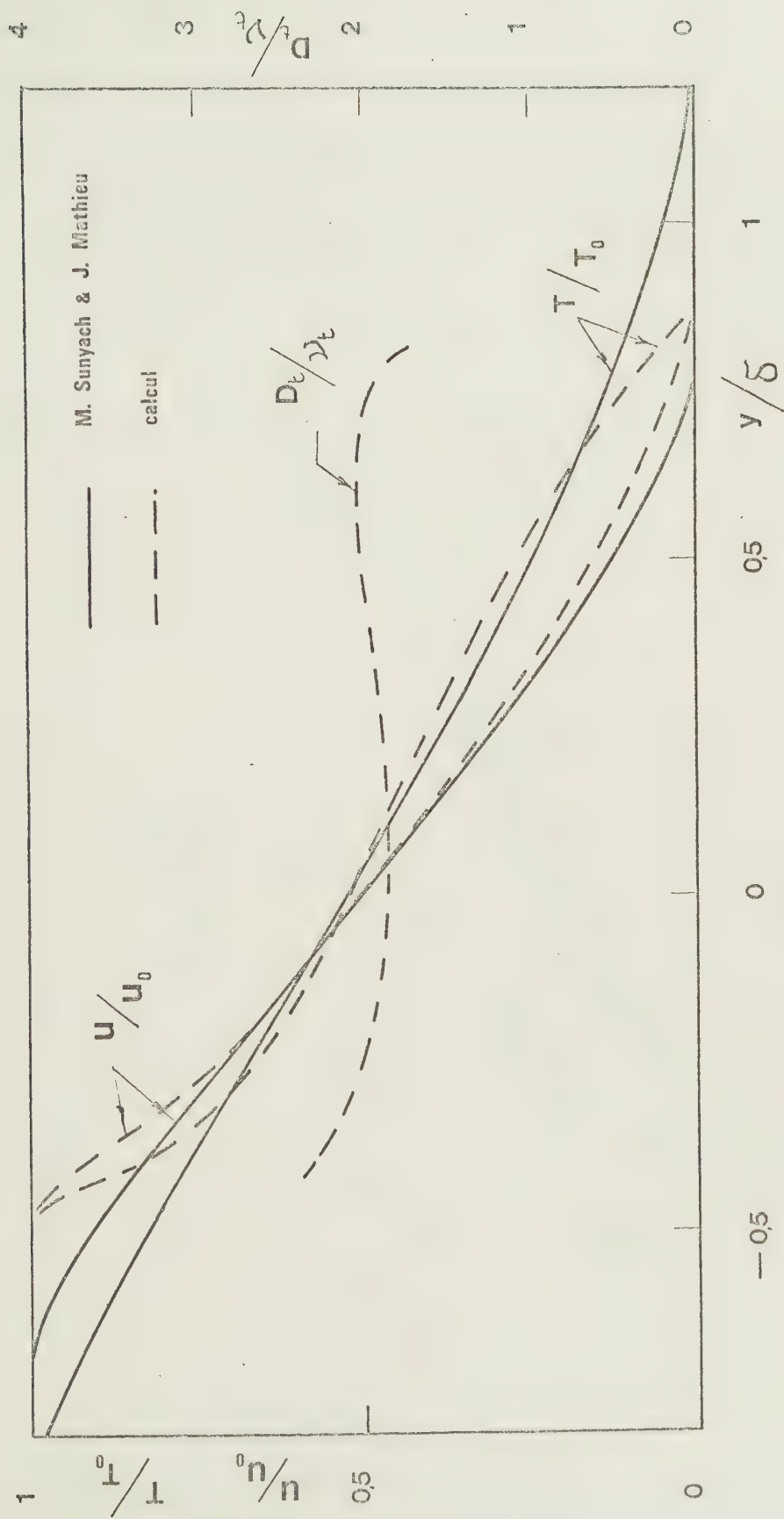


FIG 67 VITESSES ET TEMPERATURES MOYENNES DANS LA ZONE DE MELANGE DU JET PLAN
(MODELE SIMPLIFIE)

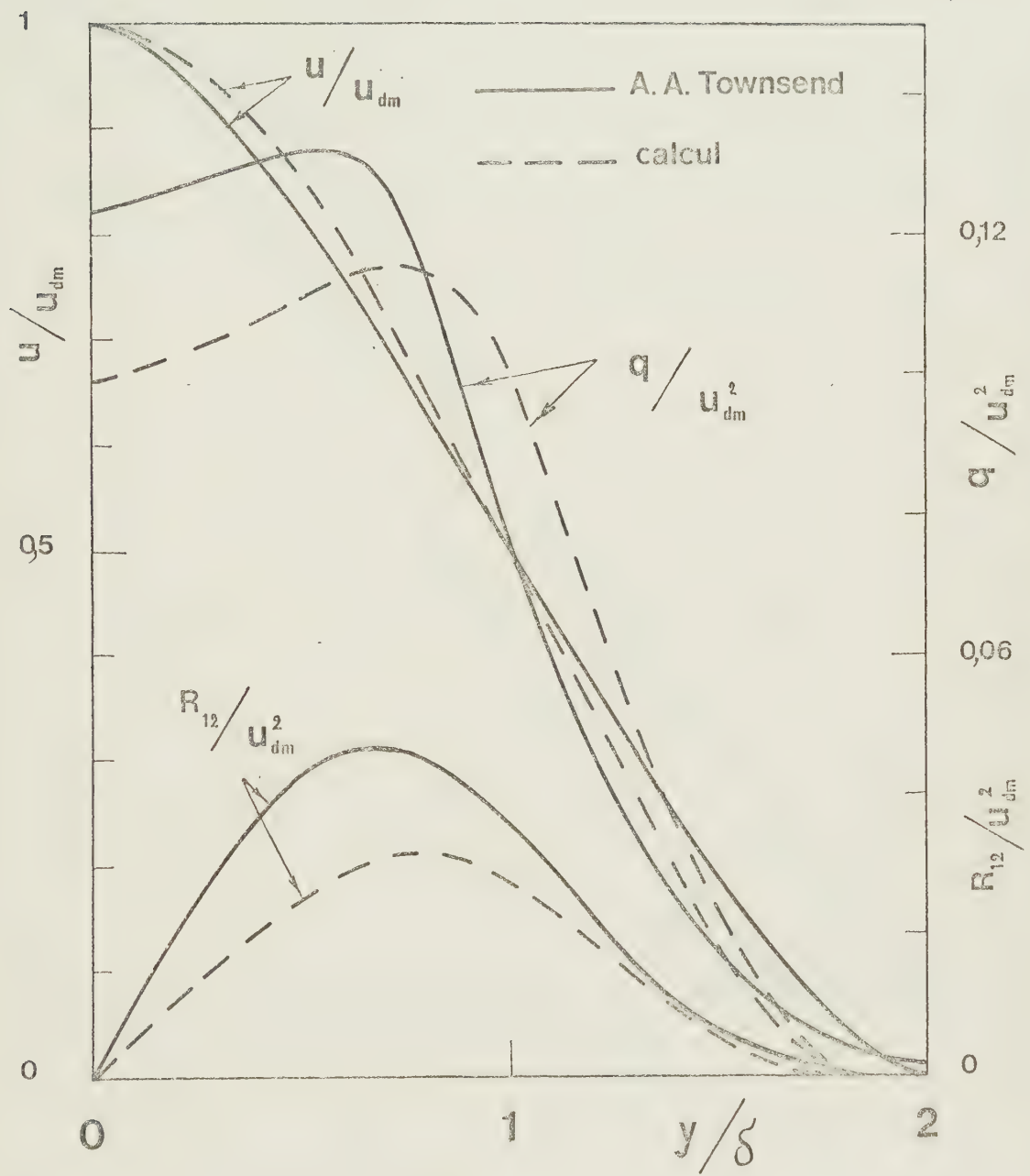


FIG 68 SILLAGE TURBULENT LOINTAIN DERRIERE UN OBSTACLE
(MODELE SIMPLIFIE)

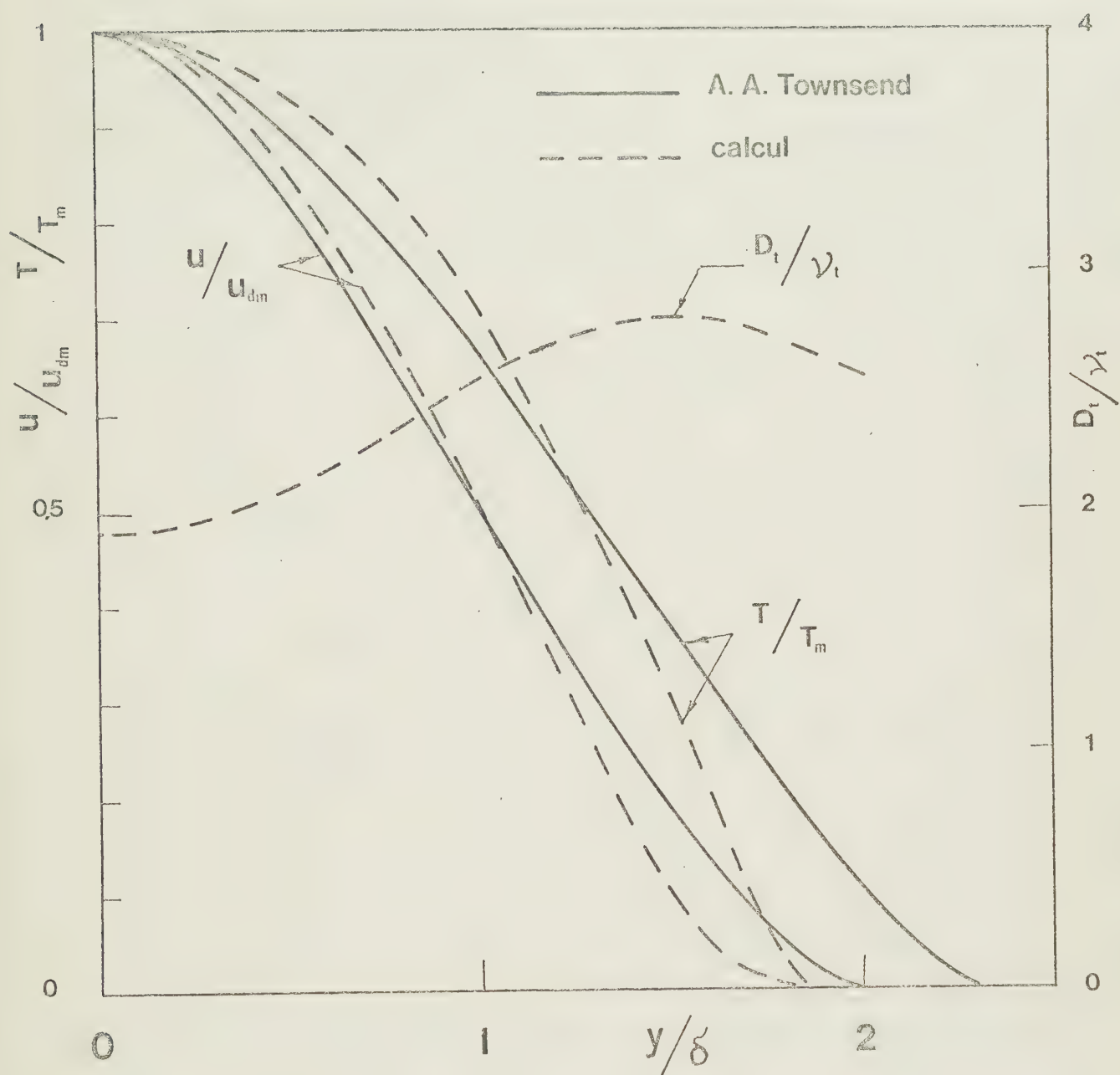


FIG 69 VITESSES ET TEMPERATURES DANS LE SILLAGE TURBULENT
DERRIERE UN OBSTACLE (MODELE SIMPLIFIE)

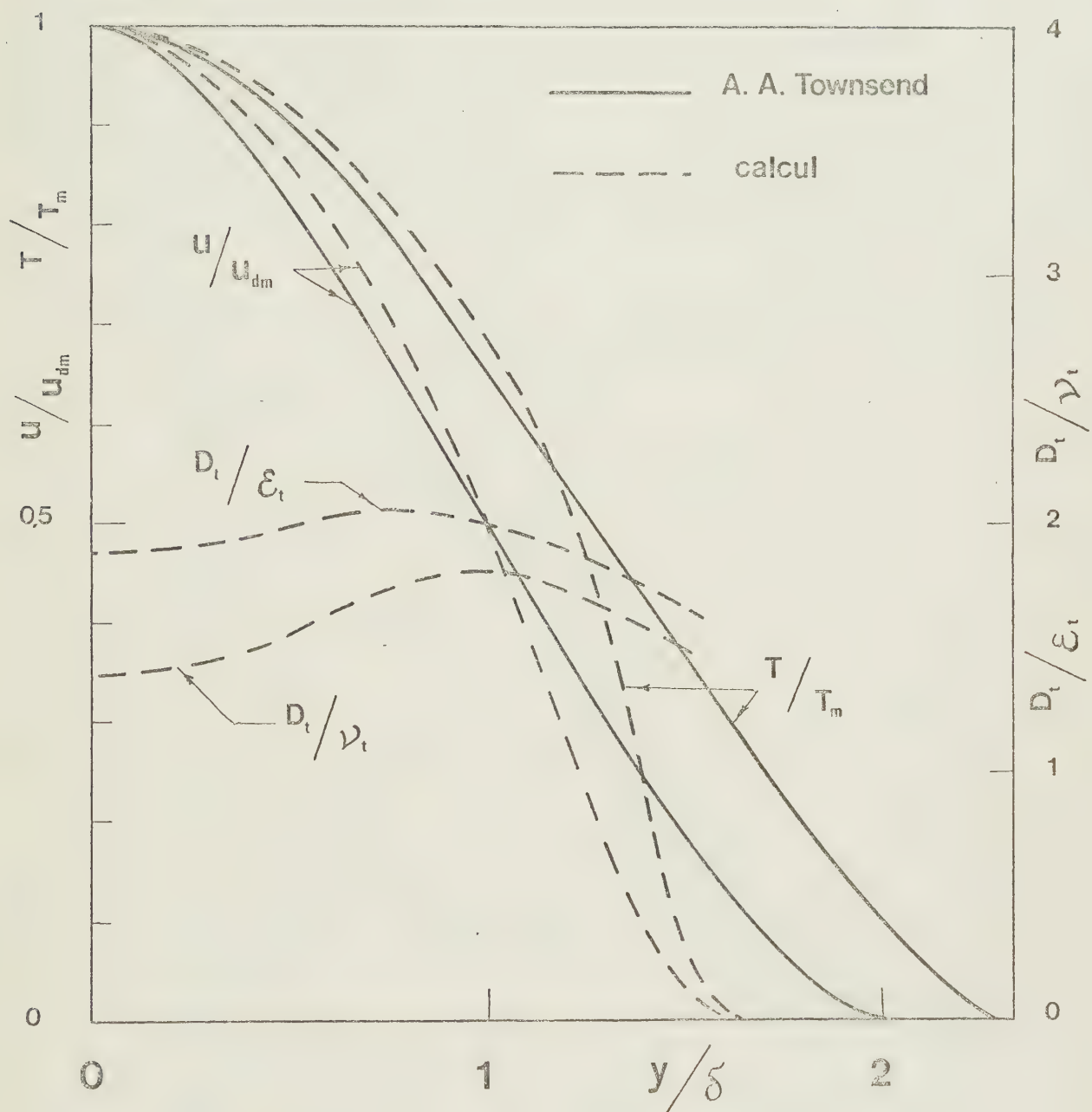


FIG 70 VITESSES ET TEMPERATURES DANS LE SILLAGE TURBULENT
DERRIERE UN OBSTACLE (MODELE COMPLET)

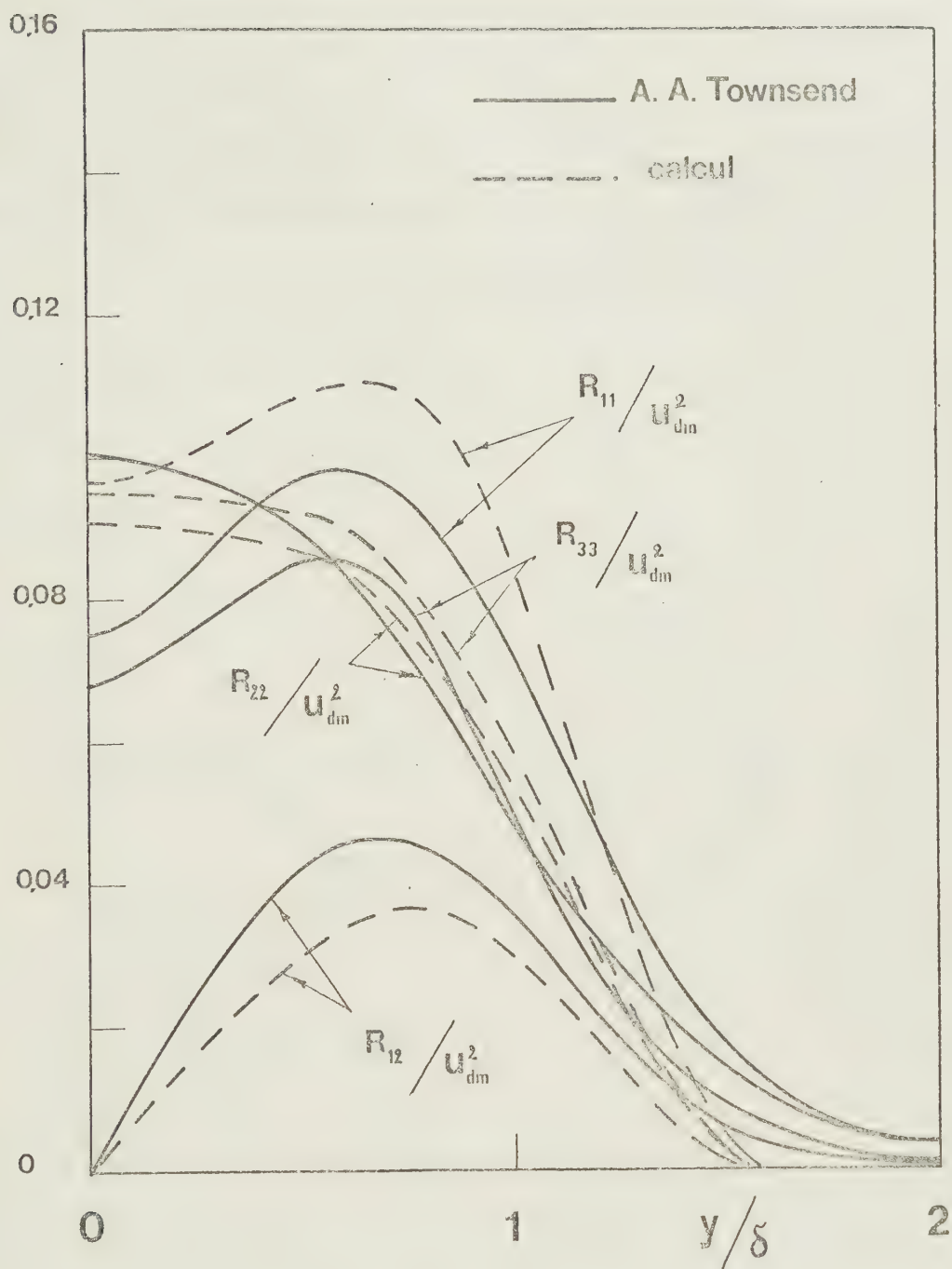


FIG 71 CORRELATIONS DOUBLES DE VITESSE DANS LE SILLAGE
TURBULENT DERRIERE UN OBSTACLE (MODELE COMPLET)

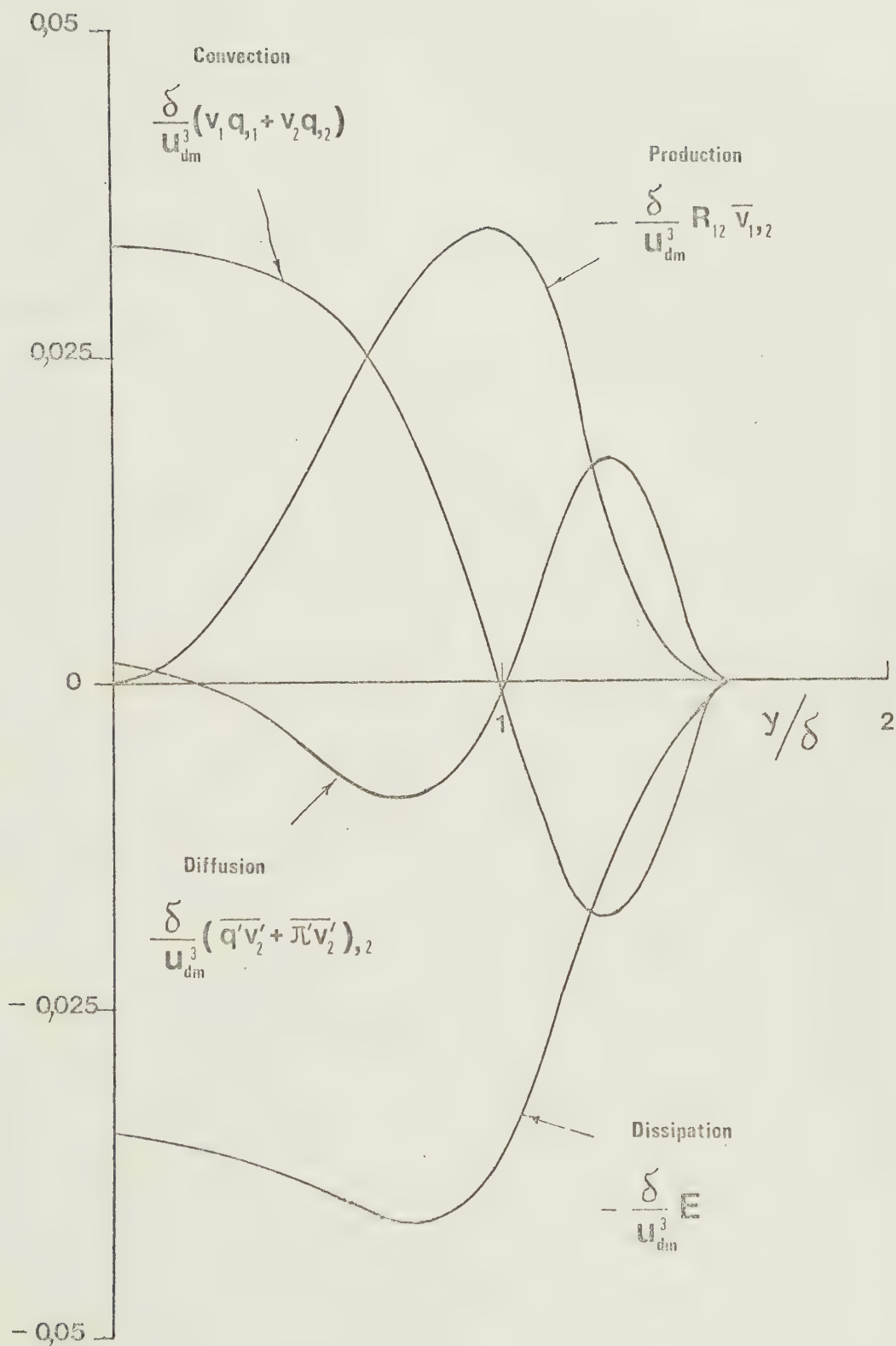


FIG 72 BILAN D'ENERGIE TURBULENTE DANS LE SILLAGE DERRIERE
UN OBSTACLE (MODELE COMPLET)

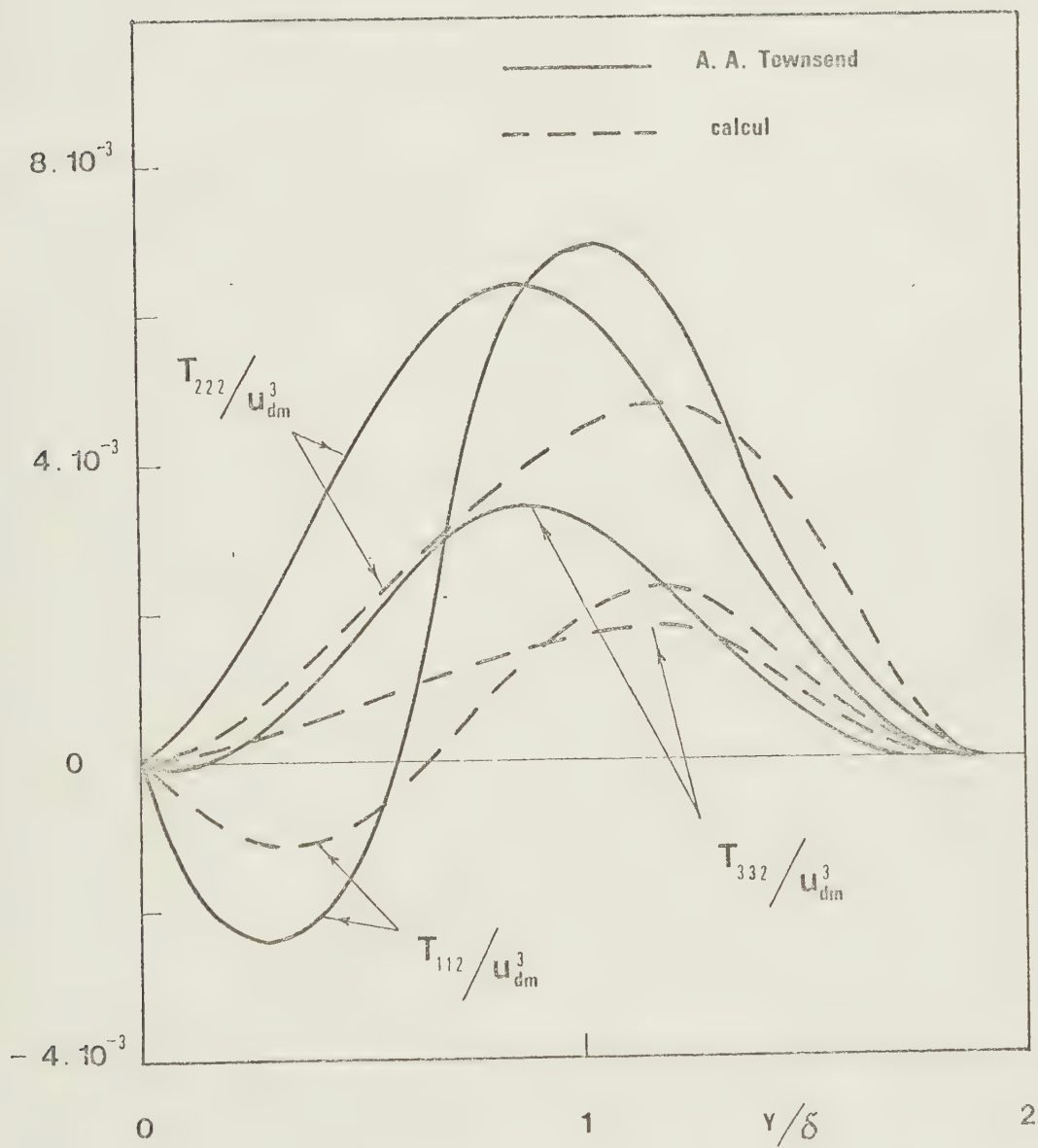


FIG 73 CORRELATIONS TRIPLES DE VITESSE DANS LE SILLAGE TURBULENT DERRIERE UN OBSTACLE (MODELE COMPLET)



FIG 74 INFLUENCE DE LA PRETURBULENCE DU COURANT EXTERIEUR
SUR L'ELARGISSEMENT D'UN SILLAGE TURBULENT

FIG 75 INFLUENCE DE LA PRETURBULENCE DU COURANT EXTERIEUR
SUR LA VITESSE AXIALE D'UN SILLAGE TURBULENT

